

50255

N. 47

# MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

HUSZONHATODIK KÖTET

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBÍZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és MIKOLA SÁNDOR



BUDAPEST 1917

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

FRANKLIN-TÄRSULAT NYOMDÁJA.



## A MATEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

### HUSZONHATODIK KÖTETÉNEK TARTALMA.

#### Első—Harmadik füzet.

EGERVÁRY J.: A seismikus trajektoriákról s az ezekkel kapcsolatos Bertrand-féle problémáról 1. l. — H. ANDERKÓ AURÉL: A hőmérséklet átlagos eloszlása a troposzférában 19 l. — BIRÓ DEZSŐ és BÉKEFY IMRE: Az ionizált szikraközök kioltó hatása 26. l. — *Physikai szemle*. PERRIN, The Svedberg, ARNE WESTGREN, G. L. de HAAS-LORENTZ munkái a Brown-féle mozgásról. ISM. MENDE JENŐ 39. l. — *Előadási kísérletek*. SELÉNYI PÁL: A szabadon eső test sebességének egyszerű meghatározása 46. l. — *Physikai laboratorium*. MIKOLA SÁNDOR: A Lichtenberg-féle alakok előállításához 49. l.

#### Negyedik—Ötödik füzet.

BAUER MIHÁLY: Az algebrai egyenletek valós gyökeinek meghatározása iterációval 57. l. — RIESZ FRIGYES: Végtelen sorozatok integrálásáról 67. l. — CSILLAG PÁL: A hatványsorra vonatkozó két összetartási kritérium kapcsolatáról 74. l. — SZILÁRD STEFÁNIA: A primitív  $n$ -edik egységgyökök  $\varphi(n)$ -ed-fokú egyenletéről 81. l. — BÁLINT ELEMÉR: Valós együtthatós egyenletek valós gyökeiről. (Harmadik, befejező közlemény.) 89. l. — SZ. NAGY GYULA: Negyedrendű másodfajú görbékről 107. l.

#### Hatodik füzet.

POGÁNY BÉLA: A komplikált típusú Zeemann-effektusra vonatkozó újabb kísérleti és elméleti vizsgálatokról 125. l. — SZÉLL KÁLMÁN: A sugárzás és a gáz energiaingadozása közötti analógiához 144. l. — SELÉNYI PÁL: A hangtölcsérről 155. l. — *Irodalom*. MENDE JENŐ: A drótnélküli telegráfia 162. l.

#### Hetedik—Nyolczadik füzet.

BAUER MIHÁLY: Az alapegyenlet elméletéhez 173. l. — A Matematikai és Physikai Társulat XXIV. rendes közgyűlése 183. l. — A Matematikai és Physikai Társulat tanulóversenyei: I. — A XXIV. matematikai tanulóverseny 188. l. — II. A II. physikai tanulóverseny 189. l. *Pomázi Z. Czelesztin* dolgozata (1. br. Eötvös Loránd-díjjal jutalmazott dolgozat.) 191. l. — *Sztrókey Pál* dolgozata. (1. Károly Irén díjjal jutalmazott dolgozat.) 191. l.

---



# NEVSZERINTI TÁRGYMUTATÓ

A HUSZONHATODIK KÖTETHEZ.

## Önálló és ismertető czikkek.

	Lap
ANDERKÓ AURÉL: A hőmérséklet átlagos eloszlása a troposzférában	19
BÁLINT ELEMÉR: Valós együtthatós egyenletek valós gyökeiről. (Harmadik, befejező közlemény.)	89
BAUER MIHÁLY: Az algebrai egyenletek valós gyökeinek meghatározása iterációval	57
BAUER MIHÁLY: Az alapegyenlet elméletéhez	173
BIRÓ DEZSŐ és BÉKEFY IMRE: Az ionizált szikraközök kioltó hatása	26
CsILLAG PÁL: A hatványsorra vonatkozó két összetartási kritérium kapcsolatáról	74
EGERVÁRY JENŐ: A seismikus trajektoriákról s az ezekkel kapcsolatos Bertrand-féle problémáról	1
NAGY GYULA: Negyedrendű másodfajú görbékéről	107
POGÁNY BÉLA: A komplikált típusú Zeemann-effektusra vonatkozó újabb kísérleti és elméleti vizsgálatokról	125
RIESZ FRIGYES: Végtelen sorozatok integrálásáról	67
SELÉNYI PÁL: A hangtölcsérről	155
SZÉLL KÁLMÁN: A sugárzás és a gáz energiaingadozása közötti analógiához	144
SZILÁRD STEFÁNIA: A primitív $n$ -edik egységgyökök $\varphi(n)$ -edfokú egyenletéről	81

## Physikai Szemle.

MENDE JENŐ: Jean Perrin, The Svedberg, Arne Westgren, G. L. de Haas-Lorentz munkái a Brown-féle mozgásról	39
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

## Előadási kísérletek.

SELÉNYI PÁL: A szabadon eső test sebességének egyszerű meghatározása	46
----------------------------------------------------------------------	----

## Physikai Laboratorium.

MIKOLA SÁNDOR: A Lichtenberg-féle alakok előállításához	49
---------------------------------------------------------	----

## Irodalom.

MENDE JENŐ: A drótnélküli telegráfia	162
--------------------------------------	-----

## Társulati ügyek. Tanulmányversenyek.

A Matematikai és Physikai Társulat XXIV. rendes közgyűlése	183
A Matematikai és Physikai Társulat tanulmányversenyei:	
I. A XXIV. matematikai tanulmányverseny	188
II. A II. A physikai tanulmányverseny	189
Pomázi Z. Czelesztin dolgozata. (I. b. EÖTVÖS LORÁND-díjjal jutalmazott dolgozat)	191
Sztrókey Pál dolgozata. (I. KÁROLY IRÉN-díjjal jutalmazott dolgozat.)	191



# MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K. A Matematikai és Fizikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

26. évfolyam.

1917. jan.—márcz.

1—3. füzet.

## A SEISMIKUS TRAJEKTORIÁKRÓL S AZ EZEKKEL KAPCSOLATOS BERTRAND-FÉLE PROBLÉMÁRÓL.

KÖVESLIGETHY egy, az Akadémia Math. és Természettud. Érte-  
sítőjében, 1913-ban megjelent értekezésében<sup>1</sup> a következő  
problémát veti föl:

Tekintsük az összes szferikus rétegeződésű, izotrop, rugalmas közegeket, azaz olyanokat, melyeknél a törésmutató (a rugalmas rezgések terjedési sebességének reciprokusa) csupán a rétegződés középpontjától számított  $\rho$  távolság  $\nu(\rho)$  függvénye. Meghatározandók az összes  $\nu(\rho)$  függvények, melyek mellett valamennyi rengési görbe (seismikus trajektoria), bármely kezdő helyzet és irány mellett záródik.

E probléma közeli analogonja az égi testek mozgásánál fel-  
lépő s először BERTRAND által megoldott ama problémának,  
melynél az összes centrális erő-törvényeket keressük, melyek  
mellett egy égi test minden kezdő helyzet, irány s sebesség  
mellett zárt pályát ír le.

KÖVESLIGETHY a nevezett problémát fentidézett értekezésében  
analog módon tárgyalja, mint az a BERTRAND-féle problémánál  
szokásos s két lényegesen különböző megoldáshoz jut. Későbbi  
vizsgálatai azonban ama sejtéshez vezettek, hogy az általa  
talált  $\nu(\rho)$  függvények nem meritik ki az összeseket, melyek a

<sup>1</sup> L. KÖVESLIGETHY R.: A földrengési menetgörbe inflexiós pontja s a  
BERTRAND-féle probléma. Math. és Természettud. Ért. 1913.



probléma feltételeinek eleget tesznek. Általa felszólíttatva foglalkoztam a problémával s sikerült oly eredményekhez jutnom, melyek sejtését ieljes mértékben megerősítik.

Jelen dolgozatban a probléma teljes megoldását adom oly módszer segélyével, melynek leglényegesebb része az ÁBEL-féle integrálegenlet alkalmazásából áll.

Ezt megelőzőleg a seismikus trajektoriák általános menetére vonatkozó, nagyrészt ismert törvényszerűségeket<sup>1</sup> szándékszm röviden összefoglalni.

A BERTRAND-féle probléma megoldása után a nyert általános formulákból, mint speciális eseteket, vezetem le a KÖVESLIGETHY,<sup>2</sup> valamint a WIECHERT-féle<sup>3</sup> törési törvényeket.

Végül egy rövid fejezetben foglalkozom a seismikus trajektoriák befutási idejével s fokális tulajdonságaival.

## I. A seismikus trajektoriák általános menetéről.

1. Legyen a szferikus rétegzésű, izotrop, határtalan közeg törésmutatója, mint a rétegeződés középpontjától számított  $\rho$  távolság függvénye a  $(0, \infty)$  intervallumban definiált, egyértékű, nem negatív  $\nu(\rho)$  funkció által adva, mely  $\nu(\rho)$ -ról fölteszük, hogy (a középpont esetleges kivételével) argumentumának folytonos, egyszer folytonosan differenciálható függvénye s második differenciálhányadosa véges számú szakadási hely kivételével szintén létezik s folytonos, végül minden véges intervallumban végesszámú maximum és minimummal bir.

Tudvalevőleg szferikus rétegzés esetén a seismikus trajektoria síkgörbe és síkja a kezdő irányon s a középponton átmenő

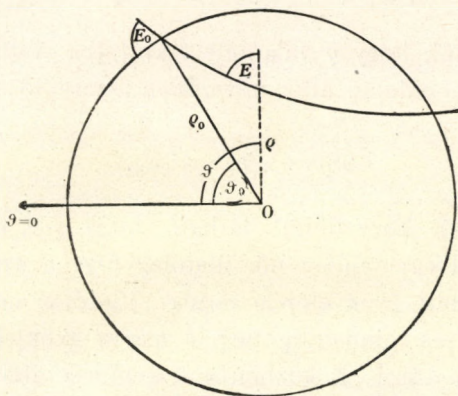
<sup>1</sup> L. KUMMER: Über astr. Strahlenbrechung, Monatsber. d. preuss. Akademie, 1860.

<sup>2</sup> L. KÖVESLIGETHY R.: A földrengési jelenségek új geometriai elmélete. Math. és Természettud. Ért. 1895.

<sup>3</sup> L. F. WIECHERT: Über Erdbebenwollen. Gött. Nachr. 1907.



sík. E síkban polárkoordinátákat vezetve be s  $\varrho_0$ ,  $\vartheta_0$ -el jelölve a kiindulási pont koordinátáit,  $E_0$ -el a kezdőirányt meghatározó



emerziószöget és  $\varrho$ ,  $\vartheta$ -val a folyó koordinátákat a trajektoria mentén, ez utóbbinak polár-egyenlete:<sup>1</sup>

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d \log \varrho}{\sqrt{\frac{\nu^2 \varrho^2}{\nu_0^2 \varrho_0^2 \cos^2 E_0} - 1}}, \quad (1)$$

hol  $\nu_0 = \nu(\varrho_0)$ .

Hasonlóképen a  $(\vartheta_0, \varrho_0)$  és  $(\vartheta, \varrho)$  pontokhoz a tovaterjedés irányában vont érintők közti, úgynevezett kontingencia szög:

$$\tau = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d \log \nu}{\sqrt{\frac{\nu^2 \varrho^2}{\nu_0^2 \varrho_0^2 \cos^2 E_0} - 1}}. \quad (2)$$

Továbbá az előbbi pontok közti ív befutásához szükséges idő

$$t - t_0 = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{\nu^2 \varrho^2 d \log \varrho}{\sqrt{\nu^2 \varrho^2 - \nu_0^2 \varrho_0^2 \cos^2 E_0}}, \quad (3)$$

<sup>1</sup> L. KÖVESLIGETHY: I. c.

végül a trajektoria görbületi sugara:  $P$  a  $(\vartheta, \varrho)$  pontban

$$\frac{1}{P} = -\nu_0 \varrho_0 \cos E_0 \frac{d \log \nu(\varrho)}{d\varrho}. \quad (4)$$

2. Tegyük föl, hogy  $\varrho$  valamely tekintetbe vett értéke mellett, az (1) jobboldalán álló nevezőben szereplő gyökkifejezés nem tűnik el, azaz

$$\nu^2 \varrho^2 \neq \nu_0^2 \varrho_0^2 \cos^2 E_0.$$

Ekkor (1)-ből közvetlenül látható, hogy a  $\vartheta$  polárszög a  $\varrho$  radiusvektorral egyidejűleg nő, illetőleg fogy a szerint, a mint az előbb említett gyök előjele pozitív, illetőleg negatív s ezen egyidejű változás mindaddig tart, a míg a gyökjel alatti mennyiség el nem tűnik. E közben a trajektoria inflexiók pontokat fog mutatni (4) szerint mindazon  $\varrho$  értékeknél, melyekre  $\frac{d\nu(\varrho)}{d\varrho} = 0$ , és pedig a  $\nu(\varrho)$ -ra vonatkozó föltevéseink értelmében csupán véges számú pontban:

3. Legyen  $\varrho = \varrho_1$  a

$$\nu^2 \varrho^2 = \nu_0^2 \varrho_0^2 \cos^2 E_0 \quad (5)$$

egyenletnek a  $\varrho$  előbb tekintetbe vett értékénél kisebb s hozzá legközelebb eső gyöke, továbbá ugyane helyen

$$\frac{d(\nu^2 \varrho^2)}{d\varrho_{\varrho=\varrho_1}} \neq 0, \quad (6)$$

azaz legyen  $\varrho_1$  az (5) egyenlet egyszeres gyöke. Ha ekkor  $\varrho$  csökkenőleg a  $\varrho_1$  értékhez közeledik, úgy (1) szerint  $\frac{d\vartheta}{d\varrho}$  minden határon túl nő s miután a (6) föltétel miatt az (1)-ben szereplő integrál konvergens,  $\vartheta$  ugyanekkor egy véges, meghatározott  $\vartheta_1$  határértékhez közeledik. Ezen  $\vartheta_1$  érték mellett a  $\varrho$  radius vektornak minimuma van s az egyenlő  $\varrho_1$ -el. Ugyanis  $\varrho$  nem csökkenhet a  $\varrho_1$  érték alá, mivel további fogyása (6) szerint az (1)-ben szereplő gyökmennyiséget imagináriussá változtatná, ellenben  $\varrho = \varrho_1$  mellett a gyökmennyiség eltűnván, előjele a folytonosság megszakítása nélkül ellenkezőre változ-



tatható, a mivel egyidejűleg  $\varrho_1$  változása az előbbi csökkenésből növekedésbe megy át. Egyidejűleg az is látható, hogy a trajektoria szimmetrikus az (5) által definiált,  $\vartheta_1$  polárszöghöz tartozó  $\varrho_1$  minimális rádius-vektorra nézve.

Ugyanígy kimutatható, hogy ha  $\varrho = \varrho_2$  az (5) egyenletnek a  $\varrho$  előbb tekintetbe vett értékénél nagyobb s hozzá legközelebb eső gyöke, továbbá  $\frac{d(\nu^2 \varrho^2)}{d\nu_{\varrho=\varrho_2}} \neq 0$ , úgy az (1) által  $\varrho = \varrho_2$ -höz rendelt  $\vartheta_2$  érték véges, meghatározott s a polárszög ezen  $\vartheta_2$  értéke mellett a rádius-vektor maximális,  $\varrho = \varrho_2$  értékét veszi föl, továbbá a trajektoria ezen maximális radius-vektorra szintén szimmetrikus.

4. Legyen  $\varrho = \varrho_1$  ismét a

$$\nu^2 \varrho^2 = \nu_0^2 \varrho_0^2 \cos^2 E_0$$

egyenletnek a  $\varrho$  tekintetbe vett értékénél kisebb s hozzá legközelebb eső gyöke, azonban egyidejűleg

$$\frac{d(\nu^2 \varrho^2)}{d\varrho_{\varrho=\varrho_1}} = 0,$$

azaz a  $\varrho = \varrho_1$  hely környezetében

$$\nu^2 \varrho^2 = \nu_1^2 \varrho_1^2 + \frac{(\varrho - \varrho_1)^2}{2} \mu^1 \quad (7)$$

Ha ekkor  $\varrho$  csökkenőleg a  $\varrho_1$  értékhez közeledik, úgy (1) szerint  $\frac{d\vartheta}{d\varrho}$  ismét minden határon túl nő, azaz  $\frac{d\varrho}{d\vartheta}$  a 0-hoz tart. Azonban (7)-ből kifolyólag az (1) integrál nem konvergál, hanem  $\varrho$ -nak  $\varrho_1$ -hez való közeledtével minden határon túl nő, illetőleg fogy a gyök előjele szerint. Ezekből együttesen következik, hogy a (7) teljesülése esetén a trajektoria aszimptotikusan, spirális-szerűen kívülről közeledik a  $\varrho = \varrho_1$  körhöz.

Ugyanígy kimutatható, hogy ha  $\varrho = \varrho_2$  az (5) egyenlet legközelebbi nagyobb gyöke és  $\frac{d(\nu^2 \varrho^2)}{d\varrho_{\varrho=\varrho_2}} = 0$ , úgy a trajektoria aszimptotikusan, belülről közeledik a  $\varrho = \varrho_2$  körhöz.

<sup>1</sup>  $\mu$  itt a  $\frac{d^2(\nu^2 \varrho^2)}{d\varrho^2}$ -nak a tekintetbe vett környezetre vonatkozó maximuma s minimuma közti értéket jelent.

5. Tegyük föl, hogy a

$$\nu^2 \varrho^2 = \nu_0^2 \varrho_0^2 \cos^2 E_0 \quad (5)$$

egyenletnek nincsen a tekintetbe vett  $\varrho$  értéknél kisebb, 0-tól különböző gyöke. Ekkor két eset különböztetendő meg. Ha

$$(\nu^2 \varrho^2)_{\varrho=0} \neq 0$$

úgy, az (1)-ben szereplő integrál  $\varrho = 0$ -ra nem konvergens, hanem  $\vartheta$   $\varrho$ -nak 0-hoz közeledtekor minden határon túl nő, illetőleg csökken. Vagyis a trajektoria aszimptotikusan, spirális alakban közeledik a középponthoz.

Ha ellenben

$$(\nu^2 \varrho^2)_{\varrho=0} = 0$$

úgy az (5) egyenletnek csak akkor nincs  $\varrho_0$ -nál kisebb gyöke, ha a  $\varrho_0$ ,  $E_0$  kezdőadatokkal alkotott kifejezés:

$$\nu_0^2 \varrho_0^2 \cos^2 E_0 = 0.$$

Ekkor az (1)-ben szereplő integrál határozatlanná válik, azonban a trajektoria aszimptotikus alakját ez esetben is meghatározhatjuk a következő módon.

Legyen  $\varrho=0$  hely környezetében

$$\nu(\varrho) = c\varrho^\alpha [1 + n_1(\varrho)] \quad (\alpha > -1), \quad (8)$$

hol  $n_1(\varrho)$  a  $\varrho$ -val együtt 0-hoz tart. Jelöljük továbbá  $\nu_0^2 \varrho_0^2 \cos^2 E_0$  változó, 0-hoz konvergáló értékét  $\sigma_0$ -val. Végül legyen ismét  $\varrho_1$  a

$$\nu^2 \varrho^2 = \nu_0^2 \varrho_0^2 \cos^2 E_0 = \sigma_0 \quad (9)$$

egyenlet legkisebb gyöke s egyúttal a trajektoria minimális rádiusvektora. Ekkor ezen  $\varrho_1$  minimális rádius-vektor s a  $\varrho_0$  közti szög (1) szerint:

$$\vartheta_0 - \vartheta_1 = \sqrt{\sigma_0} \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{d\varrho}{\varrho \sqrt{\nu^2 \varrho^2 - \sigma_0}}$$



tehát (8) figyelembevételével:

$$\lim_{\sigma_0=0} (\vartheta_0 - \vartheta_1) = \lim_{\sigma_0=0} \sqrt{\sigma_0} \int_{\varrho_1}^{\varrho_1+\varepsilon} \frac{d\varrho}{\varrho \sqrt{c^2 \varrho^{2(1+\alpha)} [1+n_1(\varrho)]^2 - \sigma_0}} + \\ + \lim_{\varrho_1+\varepsilon} \sqrt{\sigma_0} \int_{\varrho_1+\varepsilon}^{\varrho_0} \frac{d\varrho}{\varrho \sqrt{v^2 \varrho^2 - \sigma_0}}, \quad (10)$$

hol  $\varepsilon$  elegendő kicsinynek választandó, de különben fix. A jobb-oldali második integrál limese evidenten zérus. Az első integrál a (8) és (9) feltételek figyelembe vételével:

$$\int_{\varrho_1}^{\varrho_1+\varepsilon} \frac{d\varrho}{\varrho \sqrt{c^2 \varrho^{2(1+\alpha)} [1+n_1(\varrho)]^2 - \sigma_0}} = (1+\eta) \int_{\sigma_0}^{\sigma_0+\varepsilon'} \frac{\frac{2(1+\alpha)}{\sigma} d\sigma}{\sqrt{\sigma - \sigma_0}},$$

hol  $\eta$ , valamint  $\varepsilon'$   $\varepsilon$ -nal együtt 0-hoz tartanak, s  $\eta$   $\sigma_0$ -tól független.

Ezek szerint

$$\lim (\vartheta_0 - \vartheta_1) = \lim (1+\eta) \lim \sqrt{\sigma_0} \int_{\sigma_0}^{\sigma_0+\varepsilon'} \frac{\frac{2(1+\alpha)}{\sigma} d\sigma}{\sqrt{\sigma - \sigma_0}} = \\ = \frac{1}{2(1+\alpha)} \lim_{\sigma_0=0} \left\{ \arccos \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma}} \right\}_{\sigma_0}^{\sigma_0+\varepsilon'} = \frac{\pi}{2(1+\alpha)}, \quad (11)$$

vagyis oly trajektoriáknál, melyeknek (9) által meghatározott  $\sigma_0$  constansa 0-tól elég kevésbé különbözik, bármely, a minimum ponttól véges távolságra levő ponthoz vont  $\varrho_0$  rádiusvektor a minimumpont  $\varrho_1$  rádius-vektorával állandó,  $\frac{\pi}{2(1+\alpha)}$  szöget zár be. Minthogy a trajektoria még a  $\varrho_1$  rádius-vektorra szimmetrikus, tehát az előbbi állítás æquivalens azzal, hogy a trajektoriák

$$\lim \sigma_0 = \lim v_0^2 \varrho_0^2 \cos^2 E_0 = 0$$

esetén aszimptotikusan közelednek egy  $\frac{\pi}{1+\alpha}$  nyílású szöghöz, melynek csúcsa a középpont, felezővonala a nevezett trajektoriák (közösnek felteendő) minimális rádius-vektora.

6. Ha az (5) egyenletnek nincsen a tekintetbe vett  $\varrho$  érték-nél nagyobb gyöke, úgy a  $\varrho$  minden határon túl nőhet, azaz a trajektoria a végtelenbe távozik. Ugyanekkor a  $\vartheta$ -nak van véges, meghatározott határértéke, azaz a trajektoria egy fél-sugárhoz aszimptotikusan közeledik, ha az (1) integrál  $\varrho = \infty$ -re konvergens. Ellenkező esetben a trajektoria spirális-szerűen, vagy hullámvonalban távozik a végtelenbe, a szerint, a mint  $\varrho$  növekedtével  $\vartheta$  minden határon túl nő, vagy véges határok közt marad.

## II. A Bertrand-féle problémáról.

1. A seismikus trajektoriákra vonatkozó BERTRAND-féle probléma a következő: Keresendők a szükséges és elegendő feltételek, melyeknek a közeg törésmutatója, mint a centrumtól számított  $\varrho$  távolság függvényét előállító  $\nu(\varrho)$  funkció eleget tenni tartozik azon követelésből kifolyólag, hogy az összes trajektoriák<sup>1</sup> minden kezdő helyzet és irány mellett véges ívhosszú, zárt görbék.

Kiindulunk a trajektoria I, 1. alatti poláregyenletéből:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \int_{\varrho_0}^{\varrho} \frac{d \log \varrho}{\sqrt{\frac{\nu^2 \varrho^2}{\nu_0^2 \varrho_0^2 \cos^2 E_0} - 1}}, \quad (1)$$

hol, mint előbb,  $\varrho_0, \vartheta_0$  a kiinduláspont koordinátái,  $E_0$  az emerziószög ugyane pontban. A zárt s a centrumon át nem menő trajektoriák mindegyike mentén a  $\varrho$  radiusvektor egy zérustól különböző  $\varrho_1$  minimummal bír. Legyen az e radiusvektorhoz tartozó polárszög  $\vartheta_1$ . A trajektoria (1) szerint minden pontjában bír érintővel s az érintő  $\varrho_1$  végpontjában a minimum tulajdonságnak megfelelően  $\varrho_1$ -re merőleges, azaz  $E_1 = 0, \cos E_1 = 1$ .

<sup>1</sup> Természetesen a középponton átménők kivételével.



A  $\varrho_1$ ,  $\vartheta_1$  pontra, mint kiindulási pontra vonatkozólag a trajektoria poláregyenlete tehát következőként írható:

$$\vartheta - \vartheta_1 = \nu_1 \varrho_1 \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{d \log \varrho}{\sqrt{\nu^2 \varrho^2 - \nu_1^2 \varrho_1^2}}. \quad (12)$$

A továbbiakban kitűnő okokból bevezetjük még a

$$n(\varrho) = \nu^2 \varrho^2 = \varrho^2 [\nu(\varrho)]^2 \quad (13)$$

függvényt, melynek segítségével (12) következő alakra hozható

$$\vartheta - \vartheta_1 = \sqrt{n_1} \int_{\varrho_1}^{\varrho} \frac{d \log \varrho}{\sqrt{n - n_1}}, \quad [n_1 = \nu_1^2 \varrho_1^2]. \quad (14)$$

2. A trajektóriák záródásának követeléséből  $n(\varrho)$ -ra vonatkozólag elsősorban a következő szükséges föltételek adódnak.  $n(\varrho) = \nu^2 \varrho^2$  a  $\varrho = 0$  helyen eltűnik. Ugyanis  $n(0) \neq 0$  esetben az I. fejezet (5) pont szerint megadhatók lennének oly kezdő adatok, melyek mellett a trajektoria spirális alakban aszimptotikusan a centrumhoz tart, azaz nem záródik.

$n(0) = 0$ , s minden  $\varrho$ -ra nem negatív lévén,  $\varrho = 0$  környezetében növekszik; legyen  $\varrho = R$  a legkisebb  $\varrho$  érték, melyre  $\frac{dn}{d\varrho} = 0$ .

Ezen  $\varrho = R$  helyen az  $n(\varrho)$  görbének nem lehet inflexiós pontja. Ellenkező esetben ugyanis az I. 4. pont szerint megadható kezdő értékek mellett volna oly trajektoria, mely kívülről, aszimptotikusan közelednék a  $R$  sugarú körhöz s tehát nem záródnék.

Másrészt a  $\frac{dn}{d\varrho}$  eltűnésének véges  $\varrho = R$ -re be kell következni. különben az I. fejezet (6) pontja szerint az összes trajektóriák a végtelenbe távoznának.

Tehát az  $n(\varrho)$  görbének a  $\varrho = R$  helyen maximuma van.

A trajektóriák záródásának további szükséges föltétele, hogy ezen maximum-helytől kezdődőleg az  $n(\varrho)$  görbe monoton csökkenőleg haladva érje el ismét az abszcissatengelyt. Ugyanis, ha  $\frac{dn}{d\varrho}$ , mely  $\varrho = R$  jobboldali környezetében negatív, egy



$\varrho = R' > R$  értékre ismét eltűnnék, úgy az I. fejezet (4) pont szerint megadhatók volnának oly kezdőértékek, melyek mellett a trajektoria belülről aszimptotikusan közelednék a  $R'$  sugarú körhöz s nem záródnék.

Összefoglalva: A trajektoriák záródásának szükséges föltétele, hogy az  $n(\varrho) = \nu^2 \varrho^2$  függvény a  $\varrho = 0$  helyen eltűnjék, egy véges  $\varrho = R$  helyig monoton nőjjen, azon túl monoton csökkenjen.

3. Ezen föltételek teljesülése esetén az I. fejezet (5) pont

$$n(\varrho) = \nu^2 \varrho^2 = \nu_0^2 \varrho_0^2 \cos^2 E_0 \quad (5)$$

egyenletének minden  $\varrho_0, E_0$  kezdőérték mellett  $\varrho$ -ban pontosan két egyszeres gyöke van, melyek közül a kisebb:  $0 < \varrho_1 < R$  a trajektoria minimális, a nagyobb:  $\varrho_2 > R$  a maximális radius vektort adja. (I. fejj. (3) p.)

A trajektoria extremális radius vektorainak mindegyikére symmetrikus lévén, két ily szomszédos radius vektora közti ívének többszöri egymásután rakásával illeszthető össze.

A trajektoriák záródásának szükséges és elegendő feltétele tehát, hogy bármelyiknek két szomszédos extremális radius vektora által bezárt szög  $\pi$ -nek racionális többszöröse legyen, azaz (14)-ből kifolyólag minden trajektoriára álljon:

$$\sqrt{n_1} \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} \frac{d \log \varrho}{\sqrt{n-n_1}} = \lambda \pi; \quad n_1 = n(\varrho_1), \quad (15)$$

hol  $\varrho_1, \varrho_2$  a trajektoria minimális és maximális radius vektorai s  $\lambda$  tetszőleges, de fix racionális szám.

3. Ezen integrálrelációból a  $n(\varrho)$ , illetőleg  $\nu(\varrho)$ -ra következő föltételek meghatározásával foglalkozik KÖVESLIGETHY is fönt említett értekezésében.

Hogy az általa alkalmazott s a BERTRAND-éhoz analog eljárás (l. c. pp. 67—71) nem vezet az általános megoldáshoz, annak oka az, hogy nála a (15)-ben szereplő  $\varrho_1, \varrho_2$  extremálértékek, mint független változók szerepelnek, holott, ezek mindegyike



kielégítvén az (5) egyenletet, egyikük a másik által meg van határozva.

Ettől eltérő viszonyok vannak az asztronómiai BERTRAND-problémánál, hol három önkényes kezdeti adattal: távolság, kezdőirány és sebességgel rendelkezvén, a radius-vektorok  $\varrho_1, \varrho_2$  extrémális értékei tetszésszerint megadhatók, azaz független változókul tekinthetők.

Ezen különbségnek a következménye, hogy, míg az asztronómiai BERTRAND-problémának tudvalevőleg csupán két különböző megoldása van, addig az egygyel kevesebb önkényes parametert tartalmazó seismikus probléma, mint alább látni fogjuk, végtelen sok megoldással bír.

4. Bontsuk a (15)-ben szereplő integrált két részre:  $\varrho_1$ -től  $R$ -ig s  $R$ -tól  $\varrho_2$ -ig,  $R$  alatt értve, mint előbb, azon  $\varrho$  értéket, melyre  $n(\varrho)$  maximumát felveszi. Továbbá  $n(\varrho)$  a keletkezett két integrálban  $\varrho$  monoton függvénye lévén, vezessük be  $n(\varrho)$ -t, mint új integrációs változót. Ekkor a (15)-ben szereplő integrál a következő alakot nyeri:

$$\begin{aligned} \sqrt{n_1} \left\{ \int_{n_1}^N \frac{d \log \varrho_1(n)}{\sqrt{n-n_1}} dn - \int_{n_2}^N \frac{d \log \varrho_2(n)}{\sqrt{n-n_1}} dn \right\} = \\ = \sqrt{n_1} \int_{n_1}^N \frac{d}{dn} \log \frac{\varrho_1(n)}{\varrho_2(n)} \frac{1}{\sqrt{n-n_1}} dn, \end{aligned} \quad (16)$$

hol  $\varrho_1(n)$ , illetőleg  $\varrho_2(n)$  az  $n(\varrho)$ -nak a  $0 < \varrho < R$ , illetőleg  $R < \varrho$  szakaszra vonatkozó invers függvényét jelentik,  $N = n(R)$  az  $n(\varrho)$  maximuma és  $n_1 = \nu_1^2 \varrho_1^2 = \nu_2^2 \varrho_2^2 = n_2$  (5)-ből kifolyólag.

Azaz (15) szerint kell hogy fennálljon

$$\int_{n_1}^N \frac{d}{dn} \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{1}{\sqrt{n-n_1}} dn = \frac{\lambda \pi}{\sqrt{n_1}} \quad (17)$$

minden  $0 \leq n_1 \leq N$ -re.

A (17) reláció  $\frac{d}{dn} \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$ -re, mint  $n$  függvényére vonatkozólag egy ABEL-féle integrálegyenlet, melyet az ismert formula<sup>1</sup> szerint megoldva:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \log \frac{\varrho_1}{\varrho_2} &= \lambda \frac{d}{dn} \int_n^N \frac{dn_1}{\sqrt{n_1(n_1 - n)}} = \\ &= \frac{d}{dn} \log \left\{ \sqrt{\frac{N}{n}} - \sqrt{\frac{N}{n} - 1} \right\}^{2\lambda}. \end{aligned} \quad (18)$$

Tehát

$$\frac{\varrho_1(n)}{\varrho_2(n)} = C \left\{ \sqrt{\frac{N}{n}} - \sqrt{\frac{N}{n} - 1} \right\}^{2\lambda}.$$

Ha  $n = N$ , úgy

$$\varrho_1(N) = \varrho_2(N); \quad \frac{\varrho_1(N)}{\varrho_2(N)} = 1 = C,$$

vagyis

$$\begin{aligned} \varrho_1(n) &= \varrho_2(n) \left\{ \sqrt{\frac{N}{n}} - \sqrt{\frac{N}{n} - 1} \right\}^{2\lambda} \\ &= \varrho_2(n) \left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{N} + \sqrt{N-n}} \right\}^{2\lambda}. \end{aligned} \quad (19)$$

Azaz minden oly  $\varrho_1(n)$ ,  $\varrho_2(n)$  függvénpár, mely a (19) relációt racionális  $\lambda$  mellett kielégíti s melyek egyike monoton növekvő, a másika monoton csökkenő, a probléma egy megoldása.

Összefoglalólag: A szükséges és elegendő feltétele annak, hogy valamely  $\nu(\varrho)$  törési törvény mellett az összes seismikus trajektoriák záródjanak az, hogy a  $\nu^2 \varrho^3 = n(\varrho)$  függvény,  $\varrho=0$ -ra eltűnván, egy monoton növekvő s egy folytatódó monoton csökkenő ágból álljon továbbá, hogy,  $n(\varrho)$ -nak a monoton növekvő,

<sup>1</sup> Az  $f(x) = \int_x^a \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{\xi-x}} d\xi$  ABEL-féle integrálegyenlet megoldó formulája:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{f(x)}{\sqrt{\xi-x}} d\xi.$$



illetőleg csökkenő szakaszra vonatkozó inverseit  $\varrho_1(n)$ , illetőleg  $\varrho_2(n)$ -el jelölve, ezek kielégítsék a

$$\frac{\varrho_1(n)}{\varrho_2(n)} = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{N} + \sqrt{N-n}} \right\}^{2\lambda}$$

relációt, hol  $\lambda$  tetszőleges racionális szám és  $N$  az  $n(\varrho)$  maximuma.

### III. Specziális esetek.

A előbbi eredményt még a következő, a továbbiak szempontjából alkalmasabb alakban fejezhetjük ki. Ha a  $\varrho_1(n)$  függvényt valamely  $0 \leq n \leq N$  intervallumban monoton növekvőleg s különben önkényesen definiáljuk s a belőle

$$\varrho_2(n) = \left\{ \frac{\sqrt{N} + \sqrt{N-n}}{\sqrt{n}} \right\}^{2\lambda} \varrho_1(n)$$

reláció szerint alkotott  $\varrho_2(n)$  függvény monoton csökkenő, úgy ezen  $\varrho_1(n)$ ,  $\varrho_2(\nu)$  függvenypárból származó  $\nu(\varrho)$  törési törvény mellett az összes trajektoriák záródnak.

Ezen feltételek a  $\varrho_1(n)$  differenciálhányadosára vonatkozó egyenlőtlenségek alakjában következőképen fejezhetők ki:

$$\frac{d\varrho_1(n)}{dn} > 0; \quad \frac{d \log \varrho_1(n)}{dn} - \frac{\lambda \sqrt{N}}{n \sqrt{N-n}} < 0; \quad (0 \leq n < N).$$

Az ily módon definiált függvények inversei  $n(\varrho_1)$  ( $0 < \varrho_1 < R$ ) és  $n(\varrho_2)$  ( $\varrho_2 > R$ ) mindenkor folytonosan kapcsolódnak egymáshoz, továbbá rövid számolással meggyőződhetni arról, hogy ha

$$\left( \frac{dn}{d\varrho_1} \right)_{\varrho_1=R} = 0,$$

úgy a  $\frac{dn}{d\varrho}$  differenciálhányados is folytonos a  $\varrho=R$  helyen.

2. A legegyszerűbb specziális esetek a (19) alapformula különböző kiírásaiból:

$$\frac{\varrho_1(n)}{\varrho_2(n)} = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{N} + \sqrt{N-n}} \right\}^{2\lambda} = \left\{ \frac{\sqrt{N} - \sqrt{N-n}}{\sqrt{N} + \sqrt{N-n}} \right\}^2 =$$

$$= \left\{ \frac{\sqrt{N} - \sqrt{N-n}}{\sqrt{n}} \right\}^{2\lambda} \quad (21)$$

származnak, ha azokban  $\varrho_1(n)$ -et a számlálók egyikével,  $\varrho_2(n)$ -et a hozzátartozó nevezővel tesszük egyenlővé.

Az első esetben:

$$\varrho_1(n) = n^\lambda \quad \nu(\varrho) = \begin{cases} \frac{1}{\varrho} \sqrt[2\lambda]{\varrho} & \varrho \leq N^\lambda \\ \frac{1}{\varrho} \sqrt{N - (\sqrt[2\lambda]{\varrho} - \sqrt{N})^2} & \varrho \geq N^\lambda \end{cases} \quad (22)$$

$$\varrho_2(n) = (\sqrt{N} + \sqrt{N-n})^{2\lambda}$$

$\nu(\varrho)$  jobb- és baloldali deriváltjai azonban a  $\varrho = N^\lambda$  helyen nem egyenlők.

A második esetben:

$$\varrho_1(n) = (\sqrt{N} - \sqrt{N-n})^\lambda \quad \nu^2 \varrho^2 = n(\varrho) = 2 \sqrt{N \varrho^{\frac{1}{\lambda}} - \varrho^{\frac{2}{\lambda}}} \quad (23)$$

$$\varrho_2(n) = (\sqrt{N} + \sqrt{N-n})^\lambda \quad \nu(\varrho) = \frac{1}{\varrho} \sqrt{2 \sqrt{N \varrho^{\frac{1}{\lambda}} - \varrho^{\frac{2}{\lambda}}}}$$

vagyis ez esetben  $n(\varrho_1)$ ,  $n(\varrho_2)$  egyetlen analitikus görbe darabjai.

Ha  $\lambda = \frac{1}{p}$ , hol  $p$  pozitív egész szám, úgy

$$n(\varrho) = 2 \sqrt{N \varrho^p - \varrho^{2p}}; \quad \nu(\varrho) = \sqrt{2 \sqrt{N \varrho^{p-2}} - \varrho^{2p-2}} \quad (24)$$

mely  $p = 1$ , illetőleg 2 esetén a KÖVESLIGETHY-től származó, konfokális illetőleg koncentrikus kúpszeletekre vezető törési törvényeket szolgáltatja.<sup>1</sup>

3. Egy másik érdekes eset a következő:

<sup>1</sup> L. KÖVESLIGETHY I. c.



$$\begin{aligned}
 \varrho_1(n) &= \left\{ \frac{1}{2\sqrt{N}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{N} + \sqrt{N-n}} \right\}^2 \\
 \varrho_2(n) &= \left\{ \frac{1}{2\sqrt{N}} \frac{\sqrt{N} + \sqrt{N-n}}{\sqrt{n}} \right\}^2 \\
 &= \left\{ \frac{1}{2\sqrt{N}} \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{N} - \sqrt{N-n}} \right\}^2.
 \end{aligned} \tag{25}$$

Ezekből

$$\varrho_1^{-\frac{1}{2}} \varrho_2^{-\frac{1}{2}} = 4N; \quad \varrho_1^{-\frac{1}{2}} + \varrho_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{4N}{\sqrt{n}}; \quad \varrho^{-\frac{2}{\lambda}} - \frac{4N}{\sqrt{n}} \varrho^{-\frac{1}{\lambda}} + 4N = 0$$

$$\nu^2 \varrho^2 = n(\varrho) = \frac{\varrho^{\frac{2}{\lambda}}}{\left( \frac{1}{4N} + \varrho^{\frac{2}{\lambda}} \right)^2}; \quad \nu(\varrho) = \frac{\varrho^{\frac{1}{\lambda} - 1}}{\frac{1}{4N} + \varrho^{\frac{2}{\lambda}}}.$$

E formula speciális esete  $\lambda = 1$ -re az ismeretes WIECHERT-féle törési törvény:<sup>1</sup>

$$\nu(\varrho) = \frac{1}{\frac{1}{4N} + \varrho^2}, \tag{26}$$

melynél az összes trajektoriák mindazon körök, a melyek a centrum körül  $\frac{1}{2\sqrt{N}}$  sugárral leírt gömböt diametrálisan metszik.

#### IV. A trajektoriák keringési idejéről s fokális tulajdonságairól.

KÖVESLIGETHY nevezett értekezésében kimutatja, hogy az általa fölállított s (24) formulánkról  $p=1, 2$  speciális eseteként adódó törési törvények esetén valamennyi zárt trajektoria keringési ideje ugyanaz.

Közelfekvő ezek után azon kérdés, vajjon nem áll-e hasonló

<sup>1</sup> L. E. WIECHERT: Über Erdbebenwellen, Gött. Nachr. 1907.

vonatkozás minden oly  $\nu(\rho)$  törési törvény esetén, melynél az összes trajektoriák zártak? A kérdésre igenlő választ nyerünk és pedig a következő probléma általános megoldásával.

Meghatározandók a  $\nu(\rho)$  törési törvényre vonatkozó szükséges és elegendő feltételek, melyek mellett két szomszédos extrémális radius vektor közti befutási ideje valamennyi trajektoriára nézve ugyanaz.

A szóbanforgó időtartam az I. fej. (3) formulája szerint

$$t_2 - t_1 = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\nu^2 \rho^3 d \log \rho}{\sqrt{\nu^2 \rho^3 - \nu_0^2 \rho_0^3 \cos^2 E_0}}, \quad (3)$$

hol  $\rho_1, \rho_2$  mint szomszédos extrémális radius-vektorok, a

$$n(\rho) = \nu^2 \rho^3 = \nu_0^2 \rho_0^3 \cos^2 E_0 \quad (27)$$

egyenlet szomszédos gyökei. Ezen időtartamra vonatkozólag követeljük, hogy a kezdőadatoktól független, állandó szám  $= T$  legyen.

Jelöljük  $n(\rho) = \nu^2 \rho^3$  maximumát ismét  $N$ -el, az ehhez tartozó  $\rho$  értéket  $R$ -el s az integrált, mint előbb, két részre bontva, vezessük be ezekbe  $n(\rho)$ -t, mint integrációs változót. Ekkor föltételünk:

$$\int_{n_1}^N \frac{dn}{\sqrt{n-n_1}} \log \frac{\rho_1(n)}{\rho_2(n)} dn = T \quad (n_1 = \nu_1^2 \rho_1^3 = \nu_2^2 \rho_2^3) \quad (28)$$

minden  $0 \leq n_1 < N$ -re.

Az így nyert ABEL-féle integrálegyenletet megoldva:

$$\begin{aligned} n \frac{d}{dn} \log \frac{\rho_1(n)}{\rho_2(n)} &= \frac{T}{\pi \sqrt{N-n}}; \\ \log \frac{\rho_1(n)}{\rho_2(n)} &= \frac{T}{\pi} \int \frac{dn}{n \sqrt{N-n}} = \frac{T}{\pi \sqrt{N}} \log \frac{\sqrt{N} - \sqrt{N-n}}{\sqrt{N} + \sqrt{N-n}} \quad (29) \\ \frac{\rho_1(n)}{\rho_2(n)} &= \left( \frac{\sqrt{N} - \sqrt{N-n}}{\sqrt{N} + \sqrt{N-n}} \right)^{\frac{T}{\pi \sqrt{N}}}. \end{aligned}$$



Ezen formula fejezi ki a szükséges s elegendő föltételt, melynek az  $n(\rho) = \nu^2 \rho^2$  kétértékű invers függvénye eleget tenni tartozik,

(29)-et (21)-el összehasonlítva látjuk, hogy az előbbi föltétel zárt trajektoriák esetén mindig ki van elégítve s két szomszédos extrémális rádius-vektor közti ív befutására szükséges idő:

$$T = \pi \lambda \sqrt{N},$$

tehát az egész trajektoria keringési ideje  $\mathcal{T}$ , ha a  $\lambda$  racionális szám irreductibilis alakja  $\frac{p}{q}$

$$\mathcal{T} = 2q\pi \sqrt{N}.$$

2. Az előbbi fejezet (3) pontjában szereplő példa  $\lambda=1$  speciális esete oly trajektoriákra vezet, melyek az  $\frac{1}{2\sqrt{N}}$  sugarú gömb valamely pontjából kiindulván, valamennyien a gömb diametrálisán szemben fekvő pontjában egyesülnek, azaz diametrális pontok bizonyos értelemben a közeg focusainak tekinthetők.

Az előbbi problémáknál alkalmazott eljárással könnyen meghatározhatjuk mindazon  $\nu(\rho)$  törési törvényeket, melyek mellett a közeg bir ily értelemben focusokkal.

A  $R$  sugarú gömb felületén  $\Phi$  szögtávolságra levő pontok a közegnek ily értelemben focusai, ha a

$$2\sqrt{\nu_0 \rho_0} \int_{\rho_0}^R \frac{d \log \rho}{\sqrt{\nu^2 \rho^2 - \nu_0^2 \rho_0^2}} = \Phi \quad (31)$$

reláció  $R$  valamely környezetében minden  $\rho_0$ -ra fennáll.

Tegyük föl, hogy  $\rho = R$  az  $n(\rho) = \nu^2 \rho^2$  függvénynek nem minimum-helye, úgy  $n(\rho)$  a  $\rho = R$  hely valamely (esetleg mindkét) oldali környezetében monoton nő az  $n(R)$  értékig. Ezen környezetben  $n(\rho)$ -t, mint integrációs változót bevezetve:

$$\int_{n_0}^{n(R)} \frac{d \log \varrho}{\sqrt{n-n_0}} = \frac{\Phi}{2\sqrt{n_0}} \quad (n_0 = n(\varrho_0) = \nu_0^2 \varrho_0^2)$$

mely integrál egyenletnek megoldása:

$$\frac{d}{dn} \log \varrho(n) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{d}{dn} \int_n^{n(R)} \frac{dn}{\sqrt{n_0(n_0-n)}};$$

$$\varrho(n) = C \left\{ \frac{\sqrt{n(R)} - \sqrt{n(R)-n}}{\sqrt{n(R)} + \sqrt{n(R)-n}} \right\}^{\frac{\Phi}{2\pi}}$$

Ezen egyenletet  $n$ -re megoldva

$$n(\varrho) = \nu^2 \varrho^2 = \frac{\varrho^{\frac{4\pi}{\Phi}}}{\left[ \frac{1}{4n(R)} + \varrho^{\frac{4\pi}{\Phi}} \right]^2}; \quad \nu(\varrho) = \frac{\varrho^{\frac{2\pi}{\Phi}-1}}{\frac{1}{4n(R)} + \varrho^{\frac{4\pi}{\Phi}}}.$$

*Egerváry J.*



## A HŐMÉRSÉKLET ÁTLAGOS ELOSZLÁSA A TROPOSZFÉRÁBAN.

1. TEISSENRENC DE BORT az atmoszférát nagyátalánosságban troposzférára és sztratoszférára osztja. A troposzféra a Föld felületétől körülbelül 10—11 km magasságig terjed és a sztratoszféra ettől a magasságtól — még tapasztalatilag — ismeretlen magasságig.

A *troposzférának* jellemző sajátága, hogy a hőmérséklete általában a magassággal folytonosan süllyed, benne alakulnak a különböző felhők és ezen rétegben folynak le az időjárás változásai. A *sztratoszféráról* jóval kevesebbet tudunk, mint a troposzféráról. A sztratoszféra alsó rétegében a hőmérséklet meglehetősen állandó. Ez a réteg tehát *isothermás* réteget alkot, melynek középhőmérséklete körülbelül  $-55^{\circ}$  C. Ebben a rétegben a besugárzás és kisugárzás közötti hőmérsékleti egyensúly van. Ebben a rétegben felhők ritkán mutatkoznak és a levegőnek minden vertikális irányú keveredését kizártnak tekinthetjük.

2. A következőkben Közép-Európában több helyen felbocsátott önműködő meteorológiai műszerekkel felszerelt hidrogéngázzal töltött gömbök, ballons-sondes, adataiból a troposzférát jellemző hőmérsékleti viszonyokat röviden ismertetjük.

A különböző megfigyelési helyeken több éven át végzett ballons-sondes-észlelésekből megállapítottuk a troposzférának rétegenkénti statisztikai középhőmérsékletét, vagyis megalkottuk a troposzféra átlagos hőmérsékleti eloszlását.

Erre a célra felhasználtuk a *trappesi* (párisi), *lindenbergi* (berlini), *müncheni* és *budapesti* észleléseket.

Az alábbi táblázatokban foglalt hőmérsékleti adatok több felszállásból nyert átlagokat jelentenek és pedig a párisi átlagok 581 észleléséből a berlini és müncheni átlagok hét-hét évi észlelésből (körülbelül 380—380 észlelésből) és a budapesti átlagok egyévi észlelési anyagból (32 felszállásból) lettek számítva.

#### A) csoport.

Magasság km-ben	Párisi hőmérsék	Berlini hőmérsék	Müncheni hőmérsék	Budapesti hőmérsék	Közép hőmérsék
1	+ 5·3,	+ 3·9,	+ 6·1,	+ 6·6,	+ 5·48
2	+ 0·7,	— 0·9,	+ 0·9,	+ 2·0,	+ 0·68
3	— 4·0,	— 5·8,	— 4·5,	— 2·8,	— 4·28
4	— 9·4,	— 11·7,	— 10·1,	— 8·1,	— 9·83
5	— 15·5,	— 17·7,	— 16·1,	— 13·7,	— 15·75
6	— 21·9,	— 24·5,	— 22·9,	— 20·0,	— 22·32
7	— 29·0,	— 31·6,	— 29·5,	— 27·0,	— 29·28
8	— 36·2,	— 38·8,	— 36·6,	— 34·5,	— 36·53
9	— 43·6,	— 45·5,	— 43·2,	— 41·6,	— 43·48
10	— 49·3,	— 50·8,	— 48·7,	— 48·0,	— 49·20
11	— 53·3,	— 54·3,	— 52·9,	— 52·3,	— 53·20
12	— 54·5,	— 55·7,	— 54·6,	— 53·9,	— 54·68

Ezek az átlagos hőmérsékletek egy helyről és különböző időjárási helyzetekben felbocsátott ballons-sondes-észlelésekre vonatkoznak. Az észlelési anyagot azután akképen is csoportosítottuk, hogy azokból alkotott átlagos értékek azonos típusos időjárási helyzetre vonatkozzanak. Három típusos időjárási helyzet szerint csoportosítottuk az adatokat: Barometeres maximum, barometeres minimum és átmeneti időjárási helyzet szerint.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> L. TEISSENRENG DE BORT: Sur le calcul des hauteurs des ballons par le baromètre. (Protokol über die erste Versammlung der intern. aeron. Commission 1898).

A. WAGNER: Die Temperaturverhältnisse in der freien Atmosphäre.

FR. FISCHLI: Aeronautische Meteorologie 1913.

SCHMAUSS: Beobachtungen der meteorologischen Stationen in königr. Bayern. Anhang Band XXXV. Jahr 1913.

MÁRCELL Gy.: Kézirat, melyért a szerzőnek itt is hálás köszönetet mondok.



## B) csoport.

Magasság km.-ben	Magas légnymás	Alacsony légnymás	Átmeneti légnymás
1	+ 5·8,	— 1·3,	+ 4·6
2	+ 3·4,	— 6·6,	+ 0·1
3	— 1·0,	— 11·7,	— 5·0
4	— 6·1,	— 19·3,	— 10·7
5	— 12·0,	— 26·6,	— 16·9
6	— 18·5,	— 34·7,	— 23·7
7	— 26·1,	— 43·6,	— 30·8
8	— 33·2,	— 51·8,	— 38·0
9	— 41·6,	— 58·7, <sup>1</sup>	— 44·4
10	— 48·9,	— 56·1, <sup>1</sup>	— 49·6
11	— 55·2,	— 52·8,	— 52·8

3. Ezek a statisztikai középhőmérsékletek tulajdonképpen ideális egyensúlyi helyzetben levő gáznak hőmérsékleti eloszlását szolgáltatják. Ekkor azonban a troposzférát oly ideális gáznak tekinthetjük, mely környezetétől már nem vesz fel meleget, de nem is ad meleget át környezetének, vagyis a troposzfera átlagos egyensúlyi állapotát *adiabatosnak* kell tekinteni.

Ezen átlagos hőmérsékletekkel karakterizált troposzféra első közelítésben kielégíti az ideális gázokat definiáló BOYLE-GAY-LUSSAC-féle általános egyenletet, az adiabatos állapotot jellemző POISSON-féle egyenletet és a troposzférának, mint súlyos tömegnek nyomásváltozása és magasságváltozása között fennálló HADLAY-féle egyenletet. Ezeket az egyenleteket a troposzféra alkalmazva, nyerjük, hogy első közelítésben a hőmérséklet vertikális irányú sülyedése  $\left(-\frac{dT}{dH}\right)$ , vagyis a hőmérsékleti gradiense (G) állandó mennyiséget alkot.

Úgyanis

$$-\frac{dT}{dH} = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{g}{R} = G,$$

hol  $T = 273 + \vartheta$  a troposzféra hőmérsékletét,  $H$  a talaj felszínétől számított magasságot,  $x = \frac{c_p}{c_v}$  a troposzféra fajhőinek

<sup>1</sup> Már 9—10 km között hőmérsékletinversio.

viszonyát,  $g$  a nehézségi gyorsulást és  $R$  a gázállandót jelenti. Ebből pedig következik, hogy

$$T = T_0 - \frac{x-1}{x} \frac{g}{R} H,$$

vagyis a troposzféra hőmérséklete a magassággal lineárisan csökken. — Az egyenletben  $T_0 = 273 + \vartheta_0$  jelenti a troposzféra abszolút hőmérsékletét a földfelszínén ( $H_0 = 0$ ).

Ha tehát a troposzférában a levegő átlagos fajhőinek viszonya a laboratóriumban meghatározott levegő fajhőinek viszonyával volna helyettesíthető, vagyis  $x = \frac{7}{5}$ , akkor mivel  $R = 29.3g$ , a hőmérsékleti gradiens

$$-\frac{dT}{dH} = G = 9.8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{fok}}{\text{cm}},$$

azaz minden 100 m emelkedésnek  $0.98^\circ \text{C}$  hűsülédés felel meg és  $H$  magasságban a hőmérséklet

$$\vartheta_H = \vartheta_0 - 0.0098H$$

egyenlettel volna meghatározva, hol  $H$  m-ekben van kifejezve.

4. A valóságban azonban a troposzféra levegőjének állapota eltér a száraz levegő állapotától úgy, hogy a troposzféra fajhőinek viszonya általában eltérhet a laboratóriumi hányadostól.

A fenti egyenletek alkalmasak a  $x$  kiszámítására, mert a hőmérsékleti gradienst közvetlenül az észlelésekből állapíthatjuk meg. Ismervén a gradiens értékét a  $x$ -t az egyenlettel meghatározhatjuk. A következő táblázatban a számítások eredményeit egybeállítottuk.

Az A) csoportból nyerjük:

	$-\frac{dT}{dH} = G$	$x = \frac{c_p}{c_v}$
Paris .....	$5.86 \cdot 10^{-5} \frac{\text{fok}}{\text{cm}}$	1.21
Berlin .....	5.82. " "	1.21
München .....	5.90. " "	1.21
Budapest .....	5.89. " "	1.21



A B) csoportból nyerjük:

Magas légnyomás elosz.	$6 \cdot 10 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\text{fok}}{\text{cm}}$
Alacsony „	„ 7.18.	„ „
Átmeneti „	„ 6.13.	„ „

A troposzféra átlagos hőmérsékleti eloszlásából számított gradienst a négy észlelési helyein teljesen egyezőnek tekinthetjük, úgy hogy a troposzféra átlagos hőmérsékleti gradiense Közép-Európában  $5 \cdot 9 \cdot 10^{-5} \frac{\text{fok}}{\text{cm}}$ , vagyis a troposzférában s a Föld felületétől felfelé a hőmérséklet 100 m-enként  $5 \cdot 9^\circ \text{C}$ -sal süllyed. A hőmérséklet ezen eloszlása mellett a troposzféra állapotát adiabatosnak tekintvén, fajhőinek viszonyát nagy közelítéssel  $\frac{11}{9}$ -nek vehetjük.

A hőmérsékleti gradiens az időjárással változik, a mint azt a B) csoportból megállapított adatok mutatják, és pedig a barometeres minimumban a hőmérséklet vertikális irányú süllyedése nagyobb, mint a barometeres maximumban, a mi szoros összefüggésben áll azzal, hogy a depreszióban a felszálló légáramlás erősebb, mint a maximumban a leszálló légáramlás.

5. Ha a troposzférát rétegekre — például egy-egy km vastag rétegekre — bontottnak képzeljük és minden rétegnek külön-külön megállapítjuk a hőmérsékleti gradiensét, illetve kiszámítjuk fajhőinek viszonyát, akkor a troposzféra rétegeire jellemző állandókat nyerünk.

Az alábbi táblázatban összeállítottuk állomásonként és egy-egy km vastag légrétegre érvényes középhőmérsékleti gradienst, valamint a számított fajhők viszonyát. Számításainknál nem használtuk fel a földfelszínén és a sztratoszféra környezetében nyert adatokat, hogy a zavaró hatásokat lehetőleg elkerüljük.

	Paris	Berlin és München	Budapest
Légréteg km	$-\frac{dT}{dH} = G \frac{\text{fok}}{\text{cm}} \frac{c_p}{c_v} = \alpha$	$-\frac{dT}{dH} = G \frac{\text{fok}}{\text{cm}} \frac{c_p}{c_v} = \alpha$	$-\frac{dT}{dH} = G \frac{\text{fok}}{\text{cm}} \frac{c_p}{c_v} = \alpha$
1—2	4·58.10 <sup>-5</sup> 1·16	4·99.10 <sup>-5</sup> 1·18	4·57.10 <sup>-5</sup> 1·16
2—3	4·67. „ 1·16	5·20. „ 1·18	4·78. „ 1·17
3—4	5·32. „ 1·19	5·69. „ 1·21	5·27. „ 1·19
4—5	6·14. „ 1·22	6·01. „ 1·22	5·57. „ 1·20
5—6	6·43. „ 1·24	6·80. „ 1·26	6·25. „ 1·23
6—7	7·09. „ 1·27	6·90. „ 1·26	6·94. „ 1·27
7—8	7·20. „ 1·28	7·09. „ 1·27	7·50. „ 1·29
8—9	7·35. „ 1·28	6·69. „ 1·25	7·13. „ 1·27
9—10	5·74. „ 1·21	5·40. „ 1·29	6·31. „ 1·23
10—11	4·04. „ 1·14	3·88. „ 1·13	4·27. „ 1·15
Közép	5·86. „ 1·22	5·87. „ 1·22	5·87. „ 1·22

Egybevetve a különböző állomások adatait, kitűnik, hogy a légrétegek hőmérsékleti gradiensei és fajhőinek viszonyai igen hasonló menetet mutatnak és állomásonként alig térnek el egymástól, ennél fogva a négy állomás adataiból alkotott statisztikai középértékek a troposzféra jellemző általános mennyiségeket szolgáltatják.

Ezek szerint a troposzfera statisztikai középhőmérsékleti gradiensének és fajhőiből alkotott hányadosnak menete következő:

Magasság km	$-\frac{dT}{dH}$	$\alpha$
1—2	4·80.	1·16
2—3	4·95.10 <sup>-5</sup> $\frac{\text{fok}}{\text{cm}}$	1·17
3—4	5·55. „	1·20
4—5	5·92. „	1·21
5—6	6·58. „	1·24
6—7	6·95. „	1·27
7—8	7·25. „	1·28
8—9	6·95. „	1·27
9—10	5·72. „	1·21
10—11	[4·00] „	[1·14]
Közép	5·89. „	1·22

A troposzférában tehát a közép  $\alpha = \frac{11}{9}$  és a

$$-\frac{dT}{dH} = 5·9,10^{-5} \frac{\text{fok}}{\text{cm}}.$$

A troposzférában a két mennyiség a földfelületétől felfelé egyértelműen változik. A  $\alpha$  sehol sem éri el a földfelületén,



más fizikai módszerekkel száraz levegőre meghatározott  $\frac{7}{8}$  értéket.

Ezt az eltérést nagyban előidézi a levegő különböző nedvességi állapota. Ugyanis a fenti táblázat értelmében viszonylagosan legszárazabb a 7—8 km közötti légréteg és legnedvesebb az 1—3 km meg a 10—11 km közötti légréteg; a 3—5 és 8—10 km közötti légrétegek átmeneti állapot jellegével bírnak, melyek a viszonylagos száraz és nedves légrétegeket elválasztják.

Hogy a  $G$ -nek, illetve  $x$ -nak térbeli menete a troposzférában a levegő nedvességi állapotával szoros összefüggésben van, azt a felhő-megfigyelések is támogatják.

Ugyanis a felhőmagasság megfigyelések szerint az összes felhőzetnek 22%-a (első maximum) a föld felszínétől 3 km magasságig terjedő rétegbe, 7% a (minimum) 7—8 km vastag légrétegbe és 19%-a (második maximum) 10—12 km közé esik; továbbá a 3—5 és a 8—10 km rétegekben mindössze csak 10%-a észleltetett.<sup>1</sup>

*H. Anderkó Aurél.*

---

<sup>1</sup> S. A. ARRHENIUS: Lehrbuch der kosmischen Physik. Leipzig, 1903, p. 649.

## AZ IONIZÁLT SZIKRAKÖZÖK KIOLTÓ HATÁSA.

Az utóbbi 5 év leforgása alatt a drótnélküli telegráfiában elsőrendű helyet foglalt el az a kioltó hatás, a melyet egyes szikraközöknél észleltek s a melyre WIEN professor az ő telegráf rendszerét alapította. Ez a rendszer, melyet Telefunken rendszernek is neveznek, manapság már annyira elterjedt, hogy mind többen és többen akadnak, a kik a kioltó hatást tudományos módszerekkel vizsgálat alá veszik, lényegét iparkodnak felderíteni s vizsgálják azokat a körülményeket, a melyek közt e hatás létrejön.

A kioltó hatás főleg kapcsolt köröknél jön figyelembe; az ebben végbemenő rezgési jelenségek leírása megtalálható minden jobb tankönyvben, ezért csak a legszükségesebbek elmondására szorítkozunk

Kioltó hatást sokféle szikraközzel el tudtak érni, de itt csak azokat említjük meg, a melyek a levegő ionizációján alapulnak. Ilyen volt mindjárt a legelső kioltó szikraközök közt WIEN-nek<sup>1</sup> a készüléke, a mely közönséges (0.1—1.0 mm Hg nyomású levegővel töltött) Geissler-csőből áll, melyet ő kioltócsőnek nevezett el. A kioltó hatást a szikraközben (csőben) lévő ionizált levegő idézte elő.

WIEN a kioltó csövek viselkedését vizsgálta úgy kapcsolt, mint nem kapcsolt körök esetén, ez utóbbiaknál a csövek rendszeresen működtek, míg kapcsolt körök esetében jó hatásfokot mutattak fel. Nem talált nagy eltérést akkor, ha a csőbe levegő

<sup>1</sup> M. WIEN: Phys. Zeitschr. 11 p. 76. 1910 és Jahrb. d. drahtl. Tel. 4. p. 135. 1911.



helyett más gázt tett, vagy ha a csövek és az elektródok alakját megváltoztatta. A kioltó hatásra nagy befolyással bír a gáz nyomása és még inkább az elektródoknak használt fém anyaga. Nagy feszültségnél (80,000 volt) több csövet kellett egymásután kapcsolnia, míg 100,000 voltnál a kioltóhatás megszűnt. A csövek nem terjedtek el a gyakorlatban, mert hamar tönkrementek.

ROHMANN<sup>1</sup> figyelte meg először, hogy ha a szikraközt Bunsen-lámpával ionizálja, kioltóhatást kap. A kérdést KALTENBACH<sup>2</sup> vizsgálta meg s körülbelül ugyanarra az eredményre jutott, mint WIEN a kioltó csöveknél. Az elektródfémek közül legkedvezőbb az ezüst, azután jönnek a réz, cink és magnézium. Nem voltak a jelenségre lényeges befolyással: az elektródok alakja, a láng nagysága (nem hőfoka); nagy változást mutatott a kioltó hatás az ionizáció fokának és a szikra hosszúságának megváltoztatásával. A szikraköz akkor is mutatott némi kioltó hatást, ha az egyik elektródot erős izzásig hevítette.

Ezekből a kísérletekből kiviláglik, hogy a kioltó hatás a szikraköznek bármily módon való ionizálása révén elérhető, a döntő az ionizáció foka; lényeges befolyással bír rá még az elektródfémek minősége. Ezt az eredményt találtuk mi is az alább ismertetett kísérletsorozatunknál, a hol az ionizációt a szikra útjában lévő levegőoszlop megszükitésével értük el. KÁROLY IRÉN tanár úr ugyanis azt a megfigyelést tette, hogy a kapillárcsövekben lévő levegőoszlop ionizálva van, s az elektromosságot vezeti. Az ionizációnak ezt a fajtát használtuk fel lökésgerjesztés előállítására.

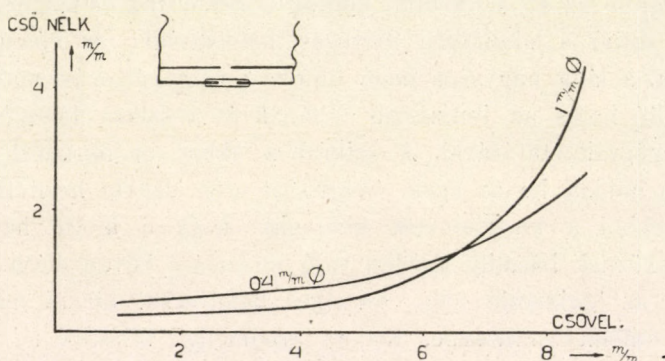
Mindenekelőtt azt kellett tisztáznunk, hogy milyen mértékű az az ionizáció, a melyet az üvegcső előidézni képes. E célból két teljesen hasonló szikraközt kapcsoltunk parallel, az egyikre ráhúztuk az üvegcsövet s az egészet összekötöttük a

<sup>1</sup> ROHMANN: Phys. Ztschr. 12. p. 649. 1911.

<sup>2</sup> KALTENBACH: Über d. Verhalten v. ionisierten Funkenstrecken. Diss. Strassburg. 1912. Kivonatosan. Jahrb. d. drahtl. Tel. 7. p. 157. 1913.

szikrainduktor szekundér sarkaival. Az üvegcsöves szikraköz elektródjait egy bizonyos távolságra beállítva, az üvegcső nélküli elektródokat addig távolítottuk egymástól, a míg mindkét szikraközben egyszerre nem ugrott át a szikra. A két szikrahossz viszonya adja az ionizációfokot. A kísérletet megismételtük különböző szikrahosszakkal és különböző átmérőjű üvegcsövekkel. Ezt az így talált összefüggést felrajzolva kaptuk a szikragörbét.

Az első ábrán kétféle üvegcsőnek (0.4 és 1.0 mm-esnek) a szikragörbéje van felrajzolva. Rövidebb üttávolságnál a két



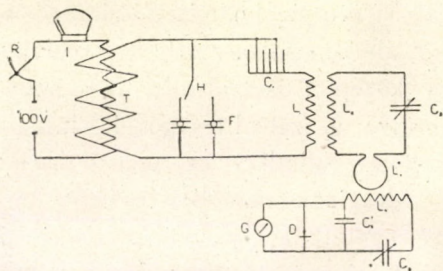
1. ábra.

cső nem mutat nagy eltérést, a mennyiben a két görbe közel párhuzamosan halad. Az ionizált szikraköz növekedésével a nem ionizált szikrahossz csak kis mértékben nő, a 0.4-es cső nagyobb szikraközeinél a nem ionizált elektródok üttávolsága még mindig mérsékelten emelkedik. Az 1.0 mm-es csőnél azonban 6 mm szikrahossz után az ionizáció foka rohamosan csökken. Rövidebb szikratávolság mellett tehát az ionizáció foka nagyobb s ezeknél az üvegcső keresztmetszetének lényeges befolyása nincs; ez magyarázza meg azt az eredményt, melyet később, a kritikus szikrahosszúság megállapításánál kaptunk.

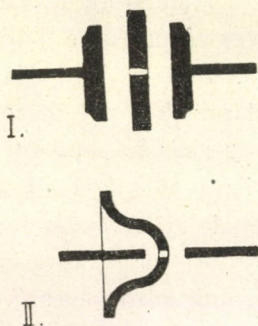


Ezután rátértünk a szikraközöknek a kapcsolt körökben való vizsgálatára.

A rezonancia és kapcsolási görbék felvételére az általánosan használt kísérleti berendezést állítottuk össze. Ez, mint a 2-ik ábrán látható, három körből áll: primér, szekundér és mérőkörből.  $T$  szikrainduktort  $R$  reosztat és  $I$  amperméter közbekapcsolásával 100 voltos váltóárammal tápláltuk. A feltranszformált áram a  $H$  kapcsolón keresztül az  $F$  szikraközökhöz juthatott, a melyek a  $C_1$  kondenzátorral és  $L_1$  önindukciós tekercscsel a primér kört alkották. A szekundér kör a változ-



2. ábra.



3. ábra.

tatható  $C_2$  kondenzátorból,  $L_2$  önindukciós tekercsből és  $L_2$  hurokból állott s a primér körrel mágnesesen volt kapcsolva.  $L_1$  és  $L_2$  tekercsek viszonylagos helyzetét tetszés szerint lehetett változtatni, úgyhogy a két kör kapcsolási tényezője is tág határok közt ingadozott. A két tekercs viszonylagos elmozdulása egy fokoztással ellátott lécz mentén történt és a variométer kalibrálása után ismeretes lett minden egyes fokhoz tartozó kapcsolási tényező érték. A harmadik vagy mérőkör, a mely a másodikhoz túl lazán volt kapcsolva,  $C_3$  változtatható,  $C_3$  blokk kondenzátort,  $L_3$  tekercset,  $D$  piridetektort és  $G$  galvanométert tartalmazta. A primér- és a szekundérkör pontosan egymáshoz volt hangolva, hullámhosszúságuk 810 m-t tett ki; ezt a rezgésszámot az egész kísérletsorozat alatt megtartottuk.

A kísérlet menete a következő volt:  $F$  szikramikrométerek egyikébe beletettük az elektródokat «ionizátor» nélkül, míg a másikba hasonló két elektród jött, de közöttük foglalt helyet a vizsgálandó «ionizátor». Az ionizátor nélküli szikraközt a célszerű hosszúságra beállítva, a  $H$  kapcsoló két szorítóját egy dróttal rövidre zártuk, úgyhogy az áram mindkét szikraközhöz át vehette útját s azután a másik szikramikrométer elektródjait addig közelítettük egymáshoz, a míg itt is szikra nem ugrott át.

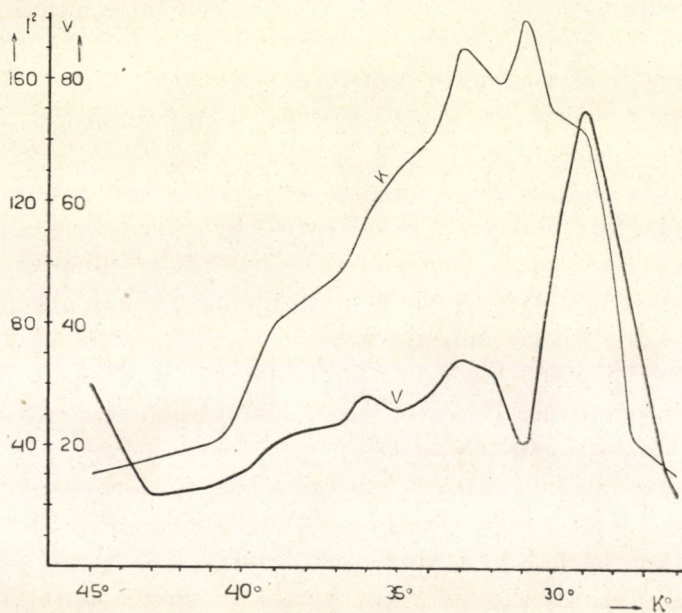
Az első «ionizátor», a mi vizsgálat alá került, különböző keresztmetszetű üvegcső volt, ez azonban csak a kérdés minőleges eldöntésére (l. alább) volt alkalmas; az a nagy hőenergia, a mely még igen kis elektródtávolságoknál is a szikraközben felszabadult pár másodperc alatt megolvasztotta az üvegcsövet s az vagy lecseppent, vagy középen összeolvadt, úgy hogy a szikra ezt a gömböt megkerülve, a szabad levegővel érintkezve haladt át. A hatás természetesen mindkét esetben leromlott. Így tértünk át a vastagabb agyaglemezekbe fúrt lyukakra. Vizsgáltunk közönséges, kevésbé égetett agyagcseréplemezeket, itt azonban a korrozíóhoz hasonló jelenséget tapasztaltunk, a mely szintén hamar bekövetkezett. Rövidesen megszűnt a lyuk egyenletes átmérője s a lemez két széle felé hatalmas kráter képződött, a mi természetesen a viszonyok állandó változását vonta maga után s a következtetések levonását továbbá az összehasonlítást lehetetlenné tették. Meglehetősen tartósaknak bizonyultak a LECLANCHÉ-elem diafragmájának fenekéből készült kísérleti darabok.

Legjobb hatást a 3. II-ik ábrán feltüntetett alakú, kaolinból házilag égetett agyagkupakok mutattak fel; ennek magyarázata a későbbi vizsgálatok folyamán derült csak ki. A jelenségnél ugyanis fontos szerepe van az agyag hülésének, a mi itt, a többiekhez viszonyítva, leginkább megvolt. Úgy a nagy felület, mint a kupak tölcésrszerű alakja, a mi a légkeringést nagyban elősegíti, a hülést növelte, a hatást fokozta s a kupak korrozíóját gátolta.



Ugyancsak a hűlés hiánya tette kedvezőtlené az ionizátor-  
nak azt az elhelyezését, a mely szerint az anyaglemezek szo-  
rosan az elektrodok között foglaltak helyet. Ilyenkor a szikrát  
csak rövid ideig lehetett fentartani s az csakhamar ivbe csa-  
pott át. Ezt a kellemetlenséget a 3. I-ső ábrán feltüntetett el-  
rendezéssel küszöböltük ki.

Annak eldöntésére, hogy az üvegcsővel körülvelt szikra-  
köz képes-e előidézni valami kioltó hatást, a 2-ik ábrán fel-



4. ábra.

tüntetett  $F$  szikramikrométerek egyikébe 0.8 mm átmérőjű  
vörösrézdrótelektrodokat helyeztünk s a szikrahosszat 3 mm  
távolságra állítottuk be. A szikramikrométerhez sorosan még  
egy platina-iridium többszörös szikraköz (Boas-féle) három tá-  
nyérja volt kapcsolva, a mi hivatva lett volna a rézelektrodtól  
annyi energiát elvonni, hogy az üvegcső megolvadása elkerül-  
tessék. Ebben az összeállításban a galvanométer helyébe kap-  
csolt PAUL-féle mikroamperméter  $9.5 \cdot 10^{-4}$  voltot mutatott. Az



üvegcső, a mely a drótra szorosan illett, ráhelyezésével ez az érték felment  $14 \cdot 10^{-4}$  voltra. Az eléje kapcsolt háromszoros szikraköz azonban nem tudta meggátolni az üveg megolvadását s ez csakhamar be is következett, a melylyel egyidejűleg a mikroamperméter is visszament eredeti értékére. Mivel üzem közben semmi más tényező nem változott meg, csak az üvegcső ment tönkre, a hatás tisztára ennek tudható be.

Rátérve a kvantitativ vizsgálatok tárgyalására, a sok mérés és eredmény közül csak azokat óhajtjuk közölni, a melyek egymástól lényegesen eltérő s szembeötlő eredményeket adnak. Így mellőzzük a gyengén égetett agyaglemezzel végzett kísérleteket, a melyeknek megbízhatóságát a kráterképződés úgyis nagyon csökkentette.

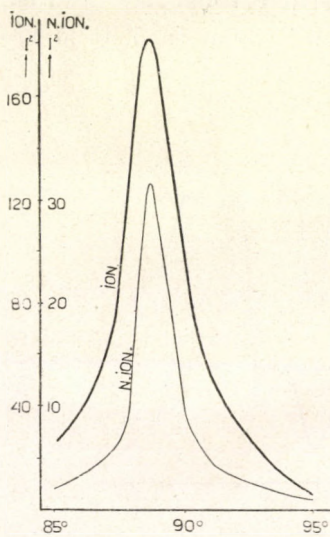
Annak megítélésére, hogy milyen kioltóhatást gyakorol az ionizátor egy bizonyos kapcsolás mellett a szikraközre, a rezonanciagörbe szolgál, mert ennek lefolyásából mondhatjuk meg, hogy melyik rezgés dominál a szekundérkörben s ebből azt, hogy a kioltóhatás milyen szoros kapcsolást enged meg. Egyszerűbb az eset a maximum ilyen keresgetésénél, ha a rezonanciagörbét megelőzően a kapcsolási görbét vesszük fel a mérőkörnek a rezonancia helyén való állása mellett.

A 4-ik ábrán látható kapcsolási görbe ( $K$ ) több szélső értéket ad <sup>1</sup> s legnagyobb értéke a  $31^\circ$  ( $20\%$ ) variométerállás mellett van. Itt felvéve a rezonanciagörbét az 5-ik ábrán látható alakot nyerjük. Kikeresve egy kevésbé kedvező helyet (pl. a  $26^\circ$   $39\%$  variométerállásnál), a rezonanciagörbét itt is felvesszük; ez a 6-ik ábrán van feltüntetve. A két rezonanciagörbe nem mutat fel egymástól nagy eltérést, csak az energia nagyobbodott meg tetemesen az ionizált szikraköz esetében, pedig a kapcsolási görbe a  $31^\circ$  variométerállást mutatta legkedvezőbbnek. Ennek a görbének a lefolyása úgy az ionizált, mint a nem ionizált szikraköz esetében körülbelül megegyezik,

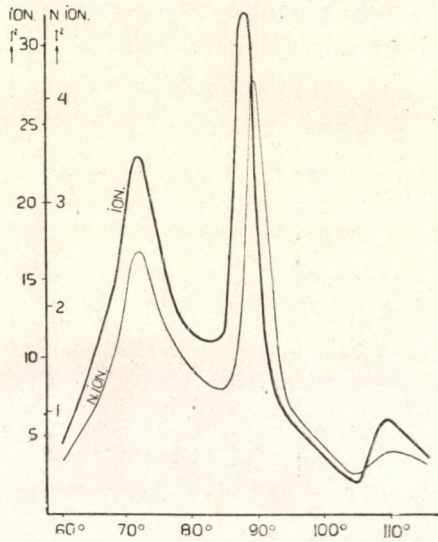
<sup>1</sup> Ez a jelenség a kapcsolási görbékre jellegzetes. RIEGGER H.: Jahrb. d. drahtl. Telegr. 5. 35. 1912.



amennyiben mindkét alkalommal jó kioltóhatást mutatnak. A  $31^\circ$ -os kapcsolás ugyanis nem elég szoros arra, hogy az ionizált szikraköz hatása szembeötlő legyen. A  $26^\circ$ -os kapcsolás pedig mindkét esetben rossz kioltóhatást ad; itt már úgy az ionizált s pláne a nem ionizált szikraköznek a kapcsolása túl szoros. Tehát sem a  $31^\circ$ -os sem pedig a  $26^\circ$ -os variométer-állásnál nem kaptunk kedvező kioltóhatást, bár a kapcsolási



5. ábra.



6. ábra.

görbe a  $31^\circ$ -nál mutatta a maximumot. Így kimondhatjuk, hogy a jó kioltóhatás megítélésére nem elegendő a kapcsolási görbék menetének megvizsgálása, mert pl. a maximum helyen a nem ionizált szikraköz is tetemes energiaértéket adhat.

A kioltóhatás mértékét tehát a rezonancia helyén mutatkozó energiák (árameffektusok) viszonya fogja megadni. E mérték természetesen csak relatív értékű.

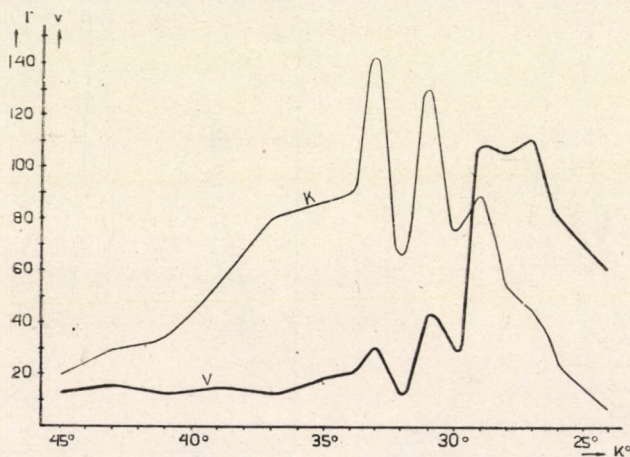
Annak megállapítására, hogy egy ionizált szikraköz milyen helyen fogja a legjobb kioltóhatást szolgáltatni, az úgynevezett

viszonygörbe<sup>1</sup> szolgál, a mely minden kapcsolásnál megmutatja, hogy a rezonancia helyén az ionizált szikra energiája hány-szorosa a nem ionizálténak. A 4-ik ábrán vastagon ( $V$ ) a viszony-görbe is fel van rajzolva, tehát

$$V = \frac{i_{\text{eff. ion.}}^2}{i_{\text{eff. nem ion.}}^2}$$

képletből számított értékek szerepelnek ordináták gyanánt.

Egy pillantás a viszonygörbére felvilágosítást ad nekünk, hogy miért nem kaptunk a  $31^\circ$  variométerállás mellett jó ki-



7. ábra.

oltó hatást; a viszonygörbe maximuma ugyanis  $29^\circ$ -nál van, (megfelel 27·3% kapcsolásnak) tehát a kioltóhatás szempontjából  $31^\circ$  túl laza,  $26^\circ$  pedig túl szoros kapcsolás volt.

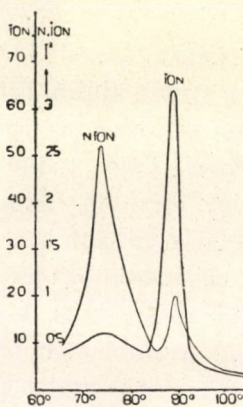
Mint említettük a 3. II-ik ábrán feltüntetett agyagkupak ki-tűnő kísérleti darabnak bizonyult. Mindenekelőtt felvettük a kapcsolási görbét  $15\cdot4$  mm ionizált szikrahossz mellett; ennek megfelelt  $9\cdot3$  mm nem ionizált equipotenciális ütőtávolság. Ezt a 7-ik ábrán a vékonyan kihúzott görbe ( $K$ ) képviseli; a

<sup>1</sup> A viszonygörbe illeten használatát már előző közleményünkben (Über eine neue Art der Stosserregung. Jahrb. d. dratl. Tel. 10. p. 232. 1916) javasoltuk.

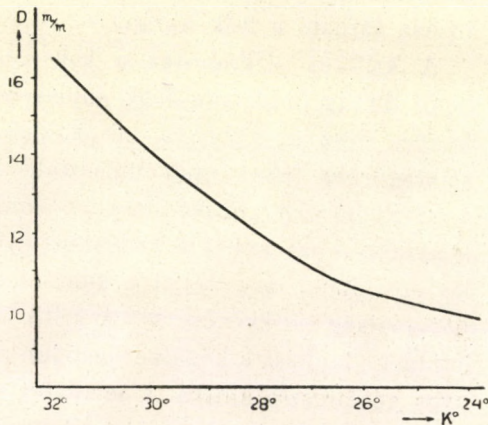


maximum  $33^\circ$ -nál van. Ha a maximum-helyeken vennénk fel a rezonanciagörbét, nem kapnánk jó kioltóhatást, úgy mint az az agyaglemezzel végzett kísérletnél történt, a  $33^\circ$  (15·3%)-os és a  $37^\circ$  (10%)-os kapcsolás túl laza volna s a nem ionizált szikraköz is éles rezonanciahelyet mutatna fel, természetesen jókorával kisebb energiaátzármaztatás mellett.

Megváltozik azonnal a képünk a dologról, a mint a 7-ik ábrán vastagon berajzolt  $V$  viszonygörbére tekintünk. Ez a  $29^\circ$  és  $27^\circ$  közt két szélső értéket mutat, tehát jóval szoro-



8. ábra.



9. ábra.

sabb kapcsolás mellett adja a relatív legkedvezőbb lökés-gerjesztést. A nagyobbik érték ezek közül a  $27^\circ$  variométer-állás, a mi 34·1% kapcsolásnak felel meg; ily szoros kapcsolások a gyakorlatban is csak ritkán fordulnak elő. A görbe további menetéből az is kitűnik, hogy a hatás nem romlik rohamosan, a mennyiben még 48·4% ( $23^\circ$ )-os kapcsolás mellett is az agyagszikraköz szolgáltatja energia a 60-szorosát teszi a nem ionizált energiájának.

A  $27^\circ$ -nál felvett rezonanciagörbe képe a 8-ik ábrán látható. A nem ionizált szikrának a görbéje hatalmas kapcsolási hullámot mutat, míg a rezonanciahelyen az energia ennek csak



körülbelül harmada. Betéve az agyagkupakot a kapcsolási hullám majdnem teljesen eltűnik, míg a főrezonanciahelyen hatalmas emelkedést mutat. Itt tehát tetemes kioltó hatást találtunk.

Meg kell még említeni, hogy a szikraköz hossza nagy befolyással volt a kapcsolási görbére, úgyhogy más és más szikrahosszra más és más kritikus kapcsolás adódott. Tehát minden egyes szikraköztávolságnak megvan a kritikus kapcsolása és viszont minden kapcsolásnak megfelel egy kritikus szikrahossz, a melynél tudniillik a mérőkör a legnagyobb árameffektust adja. Ennek a kritikus szikrahossznak a kapcsolással való változása látható a 9-ik ábrán.

A kritikus szikrahossz a kapcsolás szorosbitásával körülbelül  $29^\circ$ -ig lineárisan fogy, innen kezdve azután alulról nézve konvex lesz a görbe, a mi összhangban áll azzal a már a szikragörbék felvételénél tapasztalt ténnyel, hogy tudniillik a rövidebb szikrahossz nagyobb ionizációt idéz elő, mint a hosszabb s így annál a szikraköztávolságnál szorosabb kapcsolás engedhető meg, tehát a kioltó hatás rohamosabban nő az ütőtávolság csökkenésével. A kritikus szikrahosszaknak kísérleti megállapítása a következő módon történt. A variométert bizonyos skálarészre állítva, a mérőkört a primér- és a szekundérkörrel rezonanciába hoztuk s addig változtattuk a mikrométert, a míg a galvanométer maximális árameffektust nem mutatott. A kísérletnél az agyagkupakot használtuk. Érdekes még megemlíteni, hogy a kritikus szikrahosszak igen pontosan voltak beállíthatók; már 0.1 mm eltérés úgy a pozitív, mint a negatív irányban a hatás gyors lerontását vonta maga után.

Az ionizátorokat *különféle* fémelektrodok közé helyezve vizsgáltuk még, hogy milyen befolyást gyakorolnak ezek a kritikus kapcsolásra és a kioltó hatásra. Az eredmény teljesen megfelelt a nem ionizált szikraközöknél talált eredményeknek. A különböző fémelektrodokkal felvett kapcsolási görbék ugyanis azt mutatták, hogy a kioltóhatás tekintetében legjobb fém a réz, utána jönnek a cink és az aluminium. A sorrendet az ionizátor jelenléte nem változtatta meg.



Mivel meglehetősen nagy energiával dolgoztunk (a szikra-induktor primérjében 15 amp. erősségű áram keringett) s a viszonyok tisztább megfigyelhetésére mindig csak egy szikraközt alkalmazunk, egy meglehetősen kellemetlen mellékjelenséggel kellett küzdenünk. Az ionizátor és az elektródok természetes hűlése nem volt elegendő ahoz, hogy azoknak erős felmelegedését és így a túlionizációt meggátolja. Ez a fölösleges ionizáció pár percz alatt bekövetkezett, a mikor is a szikra ívbe ment át s az oscillatorikus kisülés megszűnván a hatás leromlott. A kísérletnél a megfelelő leolvasásokat ezalatt az idő alatt el tudtuk végezni, úgyhogy alapjában véve bajt nem okozott, csak minden egyes leolvasás után pár perczig várni kellett, míg az elektródok s az ionizátor megfelelő módon lehűlnek s a túlgyors ívképződést elkerüljük.

A leolvasásnál a jelenség a következően ment végbe. Az árameffektus egy darabig folyton emelkedett, majd elért egy maximumot, a mint az elektródok melegedésével az ionizáció is folyton erősödött s végül az ionizáció is elérte azt az értéket, a mely a meglévő kapcsolásnál kritikusnak mondható, azaz a legnagyobb galvanométerkitérést szolgáltatja. Innen az ionizáció tovább nőtt, de az árameffektus már esett, míg végleg ~~te~~ nem romlott, a mikor is a szikra ívbe csapott át. Az ily módon talált kritikus ionizációfokot kellene állandó értékben tartani, mert ebben az esetben az üzembiztonság a legjobb ökonomiával volna megoldva.

A rendszer stabillá tételére legközelebb levőnek a többszörös szikraköz alkalmazása látszott. Ha ugyanis több szikraközt kapcsolunk egymásután, ezáltal az egy szikraközre jutó energiát megosztottuk; ezt az elosztást addig végezhetjük, míg egy szikraközre több energia nem marad, mint a mekkora a kritikus ionizációfok állandó fentartásához szükséges, vagyis csak annyi hő válik szabaddá, amennyit az elektródok s az agyag elvezetni képesek; az így bekövetkezett stacionárius állapot a kritikus ionizációfoknál legyen.

Esetünkben már két agyagkupak-szikraköz sorbakapcsolásá-



val elértük a stacionárius állapotot és pedig a legkedvezőbb árameffektus környékén; a szikrát egy fél óráig is üzemben tudtuk tartani, úgy hogy működése folytonosnak és megbízhatónak (kihagyások nélkülinek) volt mondható. A többszörös ionizált szikraközök működésére az egyszerűségéből vonhatunk következtetést, a mennyiben kétszeri eszköz hatása jóval felülmúlja egy szikraköz hatásának a kétszeresét és így tovább. További vizsgálatok már a kérdés gyakorlati oldalára vonatkoznának.

A bevezetésben láttuk, hogy WIEN és KALTENBACH a szikraközök ionizációjával jó kioltóhatást értek el.

Mi azáltal értük el a lökésgerjesztést, hogy a szikra útjába kifűrt agyaglemezt helyeztünk. A vizsgálatokat kapcsolási görbék felvételével kezdtük, s ebből meghatározva a kritikus kapcsolást, itt és a szomszédos helyeken felvettük a rezonanciagörbéket, úgy az ionizált, mint a nemionizált szikraközökkel. Végül felrajzolva a kapcsolási viszonygörbéket, azt találtuk, hogy a relative legjobb kioltóhatást nem a kritikus kapcsolásnál érjük el.

Megállapítottuk a szikrahossz befolyását a lökésgerjesztésre s felrajzoltuk a kritikus szikrahosszak görbéjét.

Az elektród fémek minőségére ugyanazt az eredményt találtuk, mint előző kísérletezők.

Végül sikerült több szikraköz soros kapcsolásával a készüléket üzembiztossá tennünk.

A kísérleteket dr. WITTMANN FERENCZ tanár úr engedelmével, a melyért e helyen újból köszönetet mondunk, a műegyetem technikai fizikai laboratoriumában végeztük.

*Biró Dezső és Békefy Imre.*



## PHYSIKAI SZEMLE.

### A Brown-féle mozgás.

*Jean Perrin, Die Brown'sche Bewegung und die wahre Existenz der Moleküle.* Deutsch von J. DONAU. Verlag von Th. Steinkopf, Dresden 1910. 84 lap. M 2·50.

*Jean Perrin, Die Atome.* Deutsch von A. LOTTERMOSER. Verlag von Th. STEINKOPF, Dresden u. Leipzig 1914, XX+196 lap. M 6.—.

*The Svedberg, Die Existenz der Moleküle.* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1912. VIII+244 lap. M 12.

*Arne Westgren, Untersuchungen über die Brown'sche Bewegung.* ALMQUIST u. WIKSELLS BOKTRYCKERI, Uppsala 1915. VII+129 lap. M 7.—.

*G. L. de Haas-Lorentz, Die Brown'sche Bewegung und einige verwandte Erscheinungen.* FR. VIEWEG u. SOHN, Braunschweig, 1913. VI+103 lap. M 3·50.

A BROWN-féle mozgás az utóbbi időkben több okból különösen fontos jelenség. WIENER (1863) jutott először arra a gondolatra, hogy a folyadékban lebegő részek rendezetlen mozgásának okát «magában a folyadékban kell keresni, hogy belső, a folyadék állapotát jellemző mozgás kelti». CARBONELLE (1877) már jóval tovább megy: a BROWN-féle mozgás a molekuláris mozgás képe. GOUY 1888-ban felelevenítette ezt a gondolatot: «a részek láthatóvá teszik a folyadék belső mozgását, a mely magával viszi őket». Ez a kinetikus elmélet valójában akkor lett a molekuláris felfogásra döntő jelentőségű, mikor EINSTEIN<sup>1</sup> az ozmotikus nyomás fogalmából kiindulva, majd később a hő molekuláris elméletének alapján a valószínűség-számítás alkalmazásával a következő egyenletet vezette le:

$$D_x^2 = \frac{2RT}{N} \frac{t}{f},$$

<sup>1</sup> Ann. d. Phys. [4], 17, 1905. 549. l., 19, 1906, 371. l. és 22, 1907, 569. l.

$\Delta_x^2$  a  $t$  idő alatt az  $X$ -tengely irányában beálló *elmozdulások* négyzetének közepe,  $R$  az általános gázállandó,  $N$  a LOSCHMIDT-féle szám,  $T$  az abszolút hőmérséklet,  $f$  a súrlódás egységnyi sebességnél. Második egyenlete a részecske forgó mozgására vonatkozik:

$$\alpha^2 = \frac{RT}{N} \frac{t}{4\pi\eta a^3},$$

$\alpha^2$  az  $a$  sugarú gömbön  $t$  idő alatt beálló *szögelfordulások* négyzetének középértéke  $\eta$  viszkozitással bíró folyadékban.

Ugyanezeket az egyenleteket egyidejűleg SMOLUCHOWSKI<sup>1</sup> is levezette, utóbb még mások is. Az elmélet kiinduló pontja az, hogy a lebegő részek átlagos kinetikus energiája egyenlő a folyadékmolekula átlagos kinetikus energiájával. Ha sikerül az egyenletek helyességét igazolni, akkor nemcsak lényeges bizonyítékot kaptunk a molekulák valóságos léte mellett, hanem egyúttal módunk van a molekula energiájának meghatározására.

De a BROWN-féle mozgás az elektron töltésének meghatározásában is fontos szerepet játszik. Mint ismeretes, a MILLIKAN-EHRENFEST-féle módszerrel a lebegő kis gömb süllyedését és emelkedését kell megfigyelni a nehézségi erő, majd a sűrítő terében ható elektromos erő és a nehézségi erő együttes hatása alatt. Rögtön beláthatjuk, hogy a BROWN-féle mozgás a megfigyelt gömb mozgását lényegesen befolyásolja. Valóban a BROWN-féle mozgás vizsgálatának legnagyobb része az utóbbi években az elektron-elmélettel kapcsolatos.

Az első *részletes* megfigyelések JEAN PERRIN-től erednek. 1910-ig végzett megfigyeléseit első helyen említett füzeté tartalmazza. (Különlenyomat a Kolloidchemische Beihefte I. kötetéből.) Ezeket és a későbbi méréseket megtaláljuk összefoglalva Die Atome című könyvében, a mely szélesebb körű olvasókörzés számára készült. PERRIN nemcsak a kísérletezésnek, hanem az írásnak is művésze, azért könyve igen jó áttekintést nyújt. Az említett füzet csak a BROWN-féle mozgást tárgyalja az atomelmélet rövid ismertetése után. PERRIN főleg saját vizsgálatait ismerteti. Die Atome című munkája tágabb körű. Talán úgy jellemezhetjük legjobban, hogy azokat a jelenségeket és módszereket ismerteti, a melyek a LOSCHMIDT-féle szám meghatározására vezetnek. Az első fejezet-

<sup>1</sup> Ann. d. Phys. [4], 21, 1906, 756. l.



ben azokat a tapasztalatokat találjuk, a melyek az atom és molekula feltevésére vezetnek. Ilyenek a vegyi folyamatok és a diffúzió. Rövid leírását kapjuk az atom-elmélet főbb törvényeinek. A második fejezet a molekulák mozgását tárgyalja, haladó mozgásuk sebességét, forgásukat és hőrezgésüket, továbbá a szabad úthossz fogalmát.

Ezekhez csatlakozik a BROWN-féle mozgás elméletének és megfigyeléseinek ismertetése. A tárgyalás sorrendjére és módjára nézve néhány észrevételt szeretnék tenni. A BROWN-féle mozgás kinetikus elméletének következménye, hogy a lebegő részek száma felfelé exponenciális törvény szerint fogy úgy, mint a gázok sűrűsége. PERRIN jutott először erre a gondolatra, sok oldatban igen különböző feltételek mellett meg is győződött helyességéről. De ezek a vizsgálatok néhány évvel EINSTEIN elméletének megjelenése után esnek. Ha tehát PERRIN mind a két helyen a sorrendet felcseréli, akkor egyesek esetleg helytelenül fogják fel a kérdés történeti fejlődését és kevésbé méltányolják EINSTEIN érdemeit. PERRIN főleg saját megfigyeléseit ismerteti. Kétségtelen, hogy nagy érdemei vannak ezen a téren. Érdemei alig csökkennek avval, hogy az oldatok készítésében SIGMUND EXNER eljárására támaszkodott, a részek megszámlálásának módja pedig SIEDENTOPFTól és ZSIGMONDTól ered. A BROWN-féle mozgás lényegesen hozzájárult ahhoz, hogy a hőelmélet második alap-törvényét, mint valószínűségi tételt fogjuk fel. PERRIN ezt a törvényt ennek megfelelően fogalmazza, de a gondolat SMOLUCHOWSKITól ered. Az is bizonyos ma már, hogy PERRIN az előző megfigyeléseket, különösen SVEDBERG első méréseit kelleténél kevésbé értékelte.

A BROWN-féle mozgáshoz kapcsolódik az ingadozások tárgyalása. Erről röviden SVEDBERG könyvével kapcsolatban fogunk szólni. Az atom-elmélet újabb fejlődését, a quantum-elméletet és az elektromosság és mágnesség atomos felfogását szintén röviden megtaláljuk. A könyvet az atomok szerkezetének ismertetése fejezi be és itt a radioaktív jelenségekből vonható következtetésekkel ismerkedünk meg. «Az atomok létének akkora a valószínűsége, hogy a bizonyossághoz közel van.»

SVEDBERG még kevésbé tartózkodó. Azokat a bizonyítékokat keresi, a melyek a molekulák valódi léte mellett szólnak. De pontosan kifejti, hogyan kell az ilyen bizonyítékokat értelmezni. «A mint olyan jelenségre akadunk, a melyet csak úgy tudunk természettudományi világnézetünkkel összhangzásba hozni, hogy az anyagot különálló kis részekből összetettnek képzeljük, akkor egyúttal kísérleti bizonyítékot kaptunk



a molekulák léte mellett. A bizonyítékok csak addig érvényesek, a míg a kérdéses jelenséget nem sikerült jobban megmagyarázni, mint a hogyan a molekuláris elmélettel lehet.» SVEDBERG könyvének az adja meg tulajdonképeni jellegét és elsősorban értékét is, hogy saját megfigyeléseiről számol be összefoglaló keretben. Senkire sem lehet érdektelen, ha önálló kutató gondolatainak fejlődését, módszereinek kialakulását követheti. Nem találjuk meg tehát az összes jelenségeket, a melyek a molekulák létét «bizonyítják», így a radioaktivitásról csak kevés szó esik ebben a könyvben.

SVEDBERG azokat a jelenségeket, a melyekkel foglalkozott, multimolekuláris és paucimolekuláris jelenségekre osztja. Az első csoportba olyanok tartoznak, a melyeknél a molekuláknak vagy atomoknak nagy tömege szerepel. Ilyenek:

1. A fényelnyelés. Ezt SVEDBERG kolorimetrikus és spektrofotometrikus úton mérte. A nagy hézagot, a mely a kolloidális és a rokon molekuláris oldatok közt van, sikerült áthidalnia. A mint a lebegő részek kisebbednek, a szín erőssége fokozatosan közeledik a molekuláris oldatokéhoz. Valószínű tehát, hogy a molekuláris oldatok is különálló részekből alakulnak. Hat anyagot spektrofotometrikus úton is vizsgált. Az eredmény megegyezett az előbbivel: a fényelnyelésben nincs elvi különbség a kolloidális és a molekuláris oldatok között, az átmenet folytonos.

2. A diffúzió. A kinetikus gázelmélet szerint a diffúzió egyúthatója:

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{f}.$$

Gömbalakú részeknél STOKES egyenlete:

$$f = 6\pi a\eta.$$

SVEDBERG megmérte  $N$  kivételével azokat a mennyiségeket, a melyek ezekben az egyenletekben szerepelnek és  $N$  értékét így kiszámította. A nyert érték  $6 \cdot 10^{23}$  körül ingadozott, tehát jól egyezett az egyéb jelenségekből levezetett értékkel. Ezzel a kinetikus gázelmélet egyik fontos következtetését igazolta.

A paucimolekuláris jelenségeknél csak néhány atom vagy molekula hatásával van dolgunk. Főleg azért fontosak, mert közvetlen bepillantást engednek az anyag szerkezetébe. Közülük SVEDBERG a BROWN-féle mozgást és a telítettség ingadozását vizsgálta. Az első vizsgálatok különösen



azért érdekesek, mert ultramikroszkópikus részekre vonatkoznak. Arany- és higany-részeken sikerült SVEDBERGnek az EINSTEIN-féle egyenletek helyességét sok megfigyeléssel igazolnia, mert méréseinek középértéke  $N = 6.2 \cdot 10^{23}$  volt. Több tanítványával ügyes módszereket dolgozott ki az eltolódások megfigyelésére úgy, hogy megfigyelései az eddigieket pontosságban felülmulják.

Ha igen kis látómezőben a lebegő részeket figyeljük, számuk folyton ingadozik. Egyesek a BROWN-féle mozgás folytán a látómezőkből kilépnek, mások bejutnak. SMOLUCHOWSKI kimutatta, hogy az ingadozások megfigyelésével szintén lehet a gázelméletet kísérletileg ellenőrizni. Legyen  $\nu$  a részek (molekulák) száma a megfigyelt térfogatban egyenletes eloszlás esetén, a részek megfigyelt száma pedig  $n$ . A pillanatnyi viszonylagos eltérés a  $\nu$  középértéktől:

$$\delta = \frac{n - \nu}{\nu}.$$

Jelöljük  $\bar{\delta}$ -sal a megfigyelt  $\delta$  értékek közepét. SMOLUCHOWSKI szerint, ha a BOYLE-GAY-LUSSAC-féle egyenletek helyesek,

$$\bar{\delta} = \sqrt{\frac{2}{\nu\pi}},$$

ha  $\nu$  nagy szám. Ha pedig  $\nu$  kicsi, akkor

$$\bar{\delta} = \frac{2\nu^k e^{-\nu}}{k!},$$

$k$  a  $\nu$ -ben foglalt legnagyobb egész szám. Ha pedig az ideális gáz törvényei nem érvényesek, akkor az előbbi egyenletek jobboldalán még  $\sqrt{\frac{\beta}{\beta_0}}$  tényező lép fel.  $\beta$  a valódi összenyomhatóság,  $\beta_0$  pedig az összenyomhatóság a BOYLE-GAY-LUSSAC-féle egyenletek érvényességénél. Annak valószínűsége, hogy éppen  $n$  számú részt látunk,  $\frac{\nu^n e^{-\nu}}{n!}$ .

SVEDBERG megvizsgálta, hogy a  $\nu$  kis értékére vonatkozó egyenletek a tapasztalattal mennyire egyeznek. Az 1, 2, 3, ..., 9 rész előfordulásának gyakorisága a számítás és megfigyelés szerint jól egyezett, tehát újabb bizonyítékot kaptunk a kinetikus elmélet mellett. Ha a BOYLE-GAY-LUSSAC-féle egyenletek helyesek, akkor a  $\bar{\delta}$  egyenletéből számított  $\beta/\beta_0$  viszony egység. SVEDBERG azt találta, hogy ez a viszony igen híg

oldatokban a kísérleti hibákon belül egységnyi. Nagyobbodó telítésnél és növekedő részeknél az eltérés az ideális gázok törvényeitől egyre szembetűnőbb.

Könyvének utolsó részében SVEDBERG a radioaktív anyagokból kiinduló  $\alpha$ -sugarak ingadozását vizsgálja. Folyékony és gáznemű sugárzó anyagnál az ingadozás sokkal nagyobb, mint szilárdaknál. A nagyobb ingadozás igen jól megfelel a kinetikus elmélet egyenleteinek és így újabb, fontos bizonyítékot nyertünk.

SVEDBERG könyvének a tiszta áttekinthetőségen kívül megvan az az előnye is, hogy egyes nehezebben hozzáférhető svéd folyóiratokat pótol. Megfigyeléseit tanítványa, WESTGREN, folytatta. WESTGREN, éppen úgy, mint PERRIN, könyvének első részében azt az általános feladatot tűzi ki, hogy az  $N$  meghatározására szolgáló módszereket összefoglalja. De könyvét elsősorban saját megfigyeléseinek közlésére szánta, azért részletesen csak a BROWN-féle mozgással foglalkozik. A többi jelenségnek rövid írását találjuk. Ha a  $d$  sűrűségű gömbalakú rész  $D$  sűrűségű folyadékban  $v$  sebességgel egyenletesen esik, akkor

$$fv = \varphi(D - d)g,$$

$\varphi$  a rész térfogata,  $g$  a nehézségi gyorsulás. Másrészt

$$D = \frac{RT}{N} \frac{1}{f}.$$

$D$  és  $v$  mérése után ez a két egyenlet  $\varphi$  és  $v$  kiszámítására szolgál. Ezeknek ismerete után WESTGREN a PERRIN-féle egyenlet helyességét vizsgálta. Ez az egyenlet:

$$\ln \frac{n_0}{n} = \frac{N}{RT} \varphi(D-d)gh,$$

$n$  és  $n_0$  a részek száma egymás fölött  $h$  magasságban levő két rétegben. Ez az egyenlet azt fejezi ki, hogy a telítés felfelé exponenciális törvény szerint csökken. WESTGREN főleg szelén- és arany-részeket vizsgált és az előbbi egyenletet  $N$  meghatározására használta. Méréseit nagy gondnal végezte, eredménye valóban legközelebb esik  $N$ -nek eddigi ismereteink szerint legvalószínűbb értékéhez. WESTGREN szerint  $N=6.05 \cdot 10^{23}$ .

Könyvének második fele SVEDBERG kutatásaihoz csatlakozik. Azt ke-



reste, hogy a telítés, a részek nagysága, az oldó folyadék természete mennyiben befolyásolja a  $\beta/\beta_0$  viszonyt. Eredménye némileg meglepő: a valóságos összenyomhatóság eltérése az ideálistól csak látszólagos, valószínűleg a részek mozgása folytán fellépő hidrodinamikuss erők okozzák. Az a mód, a hogyan WESTGREN ezt megállapította, szintén elég érdekes. Ha a BOYLE-GAY-LUSSAC-féle egyenletek érvényesek, akkor a részek száma függőleges oszlopban egyensúly esetén exponenciális törvény szerint fogy. WESTGREN levezette a részek eloszlásának törvényét arra az esetre, ha  $\beta/\beta_0$  valóban függ a telítéstől és pedig, mint a mérések mutatták, egyenes arányban. A tapasztalat az exponenciális törvényt igazolta.

HAAS-LORENTZ könyve újat csak elméleti levezetésekben nyújt, de nem eredményeiben. Az 1906-ig terjedő vizsgálatok rövid összefoglalása után EINSTEIN elméletét és ennek PERRIN-féle igazolását, majd a többi elméletet találjuk. Ezt a későbbi vizsgálatok rövid ismertetése követi. A BROWN-féle mozgás szempontjából a könyvnek talán legértelmesebb része az a fejezet, a mely a látható és valóságos mozgás viszonyát tárgyalja. A jelenség értelmezésénél lényeges, hogy azok a nagyobb irányváltozások, a melyeket például PERRIN rajzain látunk, csak több ütközés után állhatnak elő. Másrészt pedig, minthogy szemünk a nyert benyomást egy ideig, körülbelül  $\frac{1}{10}$  másodpercig, megtartja, mi az  $\frac{1}{10}$  sec alatt szemünket érő benyomások eredőjét látjuk. Végül de HAAS-LORENTZ kijelöli azt az utat, a hogyan EINSTEIN elméletét más jelenségek tárgyalására is fel lehet használni. Ilyen jelenségek a rezgő mozgás, az elektromos töltés önkéntes mozgása, a mágnesű BROWN-féle mozgása, ha a közelében levő vezetőben az elektromos töltés önként mozog, az önként előálló hőmérsékleti különbségek stb.

A ki eredeti források után kutat, az igen jó irodalmi tájékoztatót talál WESTGREN könyvében. A ki viszont az újabb megfigyeléseknek kritikai feldolgozását keresi, az jó hasznát veszi SVEDBERG értekezésének: *Neuere Untersuchungen über die Brown'sche Bewegung* (Jahrbuch d. Radioakt. u. Elektr., 10, 1913, 467. l.), a mely a kutatások történeti fejlődését ismerteti.

Mende Jenő.

## ELŐADÁSI KISÉRLETEK.

### A szabadon eső test sebességének egyszerű meghatározása.

Mindenkinek lehet alkalma megfigyelni, ha a vízvezeték csapját csak kissé nyitja meg úgy, hogy a kifolyó víz összefüggő sugarat alkosson, hogy akkor a sugár közvetlenül a cső alatt hirtelenül, később lassabban keskenyebb és keskenyebb lesz, míg végül bizonyos mélységben cseppekre oszlik. A jelenség bizonyára éppen mindennapi volta miatt kerülte el a figyelmet, másrészt helyes felismerését talán megakadályozhatja az a körülmény, hogy első pillanatra a «contractio venae» tűneményével téveszthető össze. Érdeemesnek tartottam reá mutatni, hogy ez az egyszerű jelenség a középiskolai mechanika tanításában, különösen szabadesés tárgyalásánál milyen jól felhasználható. Mert a sugár elkeskenyedésének tényleg a contractio-hoz semmi köze nincsen, hanem egyszerű következménye ez a szabadoneső vízrészecskék egyre növekvő sebességének. Ennek felemlítésével mindjárt jó alkalmunk van a stacionarius áramlás fogalmának bevezetésére. Ha  $Q \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$  a másodpercenként kifolyó vízmennyiség,  $q \text{ cm}^2$  a sugár valamely tetszőleges keresztmetszete, akkor az illető keresztmetszetben nyilván

$$v = \frac{Q \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}}{q \text{ cm}^2} = \frac{Q}{q} \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

sebességgel kell a víznek átáramlania. Ezen a vízszugáron tehát igazán kézzelfogható módon magyarázhatjuk meg a sebesség értelmét változó mozgás esetén s szemléltethetjük a sebesség változását az esés mentén. Miután pedig mind  $Q$ , mind pedig  $q$  egészen könnyen mérhető mennyiségek, módunkban van a *szabadon eső test sebességét közvetlenül meghatározni*, ebből pedig a nehézségi gyorsulást



$$g = \frac{v^2 - v_0^2}{2h}$$

képlet szerint (a hol  $v_0$  a kezdeti, kiömlési sebességet,  $h$  az esési magasságot jelenti) kiszámítani.

A mi magát a mérés kivitelét illeti,  $h$ -nak és a sugár vastagságának,  $d$ -nek mérésére a LEITZ-féle horizontális leolvasó mikroskópot használtam, ennek beszerzését különben is minden középiskolai fizikai szertárnak — különösen a hol a tanulók is végeznek fizikai gyakorlatokat — nagyon ajánlhatom. Függőleges rúd fején vízszintesen elhelyezett, körülforgatható gyenge (cca  $10\times$ ) nagyítású mikroskóp ez, üvegre karczott okulármikrométerrel ellátva. A tubusra libella is van szerelve, hogy vízszintesre lehessen állítani; a tubust hordó rúd csöves állványában kihúzható, a kihúzást  $\frac{1}{10}$  mm pontosságú nonius méri. Egyébként okulármikrométerrel ellátott kathetometer — ha elég nagy nagyítása van — éppenúgy megfelel.

Az első mérést minden előkészület nélkül, egyszerűen a vízvezetéki csapból kifolyó vízszaggárral végeztem. A leolvasott adatok voltak:

$h$	$d$
10.0 mm	80 osztályrész
200.0 "	36 "

és 3 mm = 59.5 osztályrész az okulármikrométeren. A kiömlő vizet mensurával fogtam fel; a mérés szerint

$$Q = 302 \frac{\text{cm}^3}{\text{min}}.$$

Ezen adatokból

$$v_{20} \text{ cm} = 196 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}; \quad v_1 \text{ cm} = 39.7$$

és

$$g = \frac{v_{20}^2 - v_1^2}{19} = 973 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Egyébként ha a cső belvilágát, a melyből a víz kifolyik, lemértük, akkor elegendő a folyadéksugár vastagságát még csupán egy helyen lemérni. Természetesen a vízvezetéki csapra húzott kaucsukcsővel s annak végéhez erősített üvegcsővel a folyadéksugarat a mérésre alkalmasabb helyen állíthatjuk elő.

Ez az egyszerű berendezés még annyiban tökéletlen, hogy a sugár a víznyomás ingadozásait megérzi s nem marad eléggé nyugodtan. Néhány próba, a mit állandó, nyugodt vízszint előállítására végeztem, nem vezetett kielégítő eredményre; például a Mariotte-palaczkból kiömlő sugár a felszálló levegőbuborékok tempójában erősen lüktet.

Még egy pár szót a mérések pontosságáról. A közvetlen lemerített  $d$ ,  $h$ , továbbá a  $t$  idő alatt kiömlő  $V$  vízmennyiség adataiból

$$q = \frac{d^2\pi}{4}$$

$$v = \frac{Q}{q} = \frac{V}{t} \cdot \frac{4}{d^2\pi}$$

$$g = \frac{v^2}{2h} = \frac{V^2}{t^2} \frac{8}{d^4\pi^2h},$$

tehát  $g$ -nek relatív pontossága

$$\frac{\delta g}{g} = 2 \frac{\delta V}{V} + 2 \frac{\delta t}{t} + \frac{\delta h}{h} + 4 \frac{\delta d}{d}.$$

A négy mennyiség közül  $t$  nagyobbításával  $\frac{\delta t}{t}$  és  $\frac{\delta V}{V}$  igen kicsinnyé tehetők,  $\frac{\delta h}{h}$  is elég kicsiny, a mérés pontossága tehát lényegében  $d$  pontosságán fordul meg. Ha a folyadéksugár egészen nyugodt is,  $d$  1%-nál pontosabban alig mérhető le s ez máris 4% hibát jelent  $g$  értékében, ez tehát a mérés elvi hibája; a folyadéksugár esetleges nyugtalansága pedig még megnehezíti  $d$  mérését. Ebből érthető, hogy a végzett néhány mérés 940—1040  $\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$  között ingadozó értékeket adott. Mindamellet — különösen a jelzett tökéletesítés után — fizikai gyakorlatok czéljára s megfelelő formában előadási kísérletnek is kétségtelenül igen egyszerű, alkalmas és tanulságos e mérési módszer.

Selényi Pál.



## PHYSIKAI LABORATORIUM.

### A Lichtenberg-féle alakok előállításához.

Azon 140 év alatt, a mely eltelt azóta, hogy LICHTENBERG a róla elnevezett elektromos szikrarájzokat leírta, nagyon sok kutatót vonzottak ezek a művészeseknek mondható ábrák, elannyira, hogy a róluk szóló irodalom pusztá czímeinek felsorolása is több ívre terjed. Ennek daczára a LICHTENBERG-féle alakok problémája lényeges lépéssel nem vitetett előbbre, úgy hogy e jelenségek mindeztideig úgy szerepelnek az elektromosságról szóló tanban, mint nagyon érdekes, de különleges tények, melyek az idők folyamán felállított elméletek egyikével sincsenek szerves összefüggésben.

Fényképezőlemezrel végzett vizsgálataim alapján sikerült megmutatnom, hogy a LICHTENBERG-féle alakok egészen újfajta elektromos sugárzások eredményei, melyeket kondenzátorsugárzásoknak neveztem el.<sup>1</sup> Ezek az új elektromos sugarak akkor keletkeznek, ha valamely elektromos tér erőssége disruptív módon megváltozik, s így keletkezésük szempontjából a Röntgen-sugarakkal és a fényelektromos tűneményekkel analógok. A LICHTENBERG-féle alakok tehát becses segédeszközt nyújtanak az elektromos sugárzások tanulmányozásához és így értékesnek és fontosnak kell tekintenünk minden módszert, melylyel ezeket az alakokat elő lehet állítani. A következőkben két igen egyszerű újabb módszert fogok leírni.

Az eredeti LICHTENBERG-féle és általam, idézett dolgozataimban, használt fényképező módszer lényege két kondenzátorlap, melyeket szigetelőlap választ el egymástól, a különbség csak az, hogy nálam a szigetelőlapot fényképezőlemez helyettesíti. Az alakok előállítása végett az egyik kondenzátorlapot egy leydeni palack külső fegyverzetével kell összekötni és a másik kondenzátorlapot kisütő segítségével a belső fegyverzetből szikrával (tehát disruptív módon) kell megtölteni. A fényképező

---

<sup>1</sup> Math. és Természettud. Értesítő, 1917 (sajtó alatt) és Phys. Zeitschr. 1917, 158. l.

lemezt szokásos módon elő kell hívni és készen van a sugárzási kép. A régi módszer szerint szigetelő lapon előállított sugárzási képet szintén elő kell hívni, a mi úgy történik, hogy a lapot finom porral (leginkább minium és kénpor keverékével) meghintjük.

A mechanikus úton előállított por azonban nagyon durva szemcséjű. minek folytán a nyert sugárzási képek nem élesek és határozottak. Azon igyekezetem tehát, hogy olyan port állítsak elő, melynek szemcséi a fényképezőlemez ezüstszemcséinek nagyságrendjét megközelítsék. Ezt fémeknek igen magas hőmérsékleten való elgőzösítésével értem el. A magas hőmérsékletű fémgőzök a levegőben igen apró gömböcskék alakjában csapódnak le, melyek a levegőben kolloidális állapotban lebegnek. A gömböcskék felszíne egyszersmind fehérszínű oxidréteggel vonódik be. Különösen a magnézium és az ólom alkalmas erre a célra.

Ha a magnéziumot meggyújtjuk és a szigetelő lapot a felszálló füstbe tartjuk, akkor csakhamar elötűnnek a sugárzási képek. E módszerrel előállított képek azonban gyakran foltosak.

Az ólom egészen egyenletes, éles és tiszta képeket ad, de elgőzösítése körülményesebb, mert elektromos ívfény szükséges hozzá. E célból két ólomelektrod között, 5 amper körüli áramerősséggel, ívfényt állítunk elő és a szigetelő lapot a felszálló füstbe tartjuk. Hogy az elektrodok el ne olvadjanak, célszerű őket szélesebb lapok alakjában készíteni és az egyiket a másikhoz változtatva hozzáérinteni és eltávolítani.

Az ilyen úton előállított sugárzási képek nem érik ugyan el a fényképező módszerrel nyert képek élességét és pontosságát, de mégis messze felülmúlják a régi módszer szerint előállított képeket. A sugársávok hosszára, vagyis a primérsugarak hatástávolságára ugyanazok az összefüggések érvényesek, melyek fentidézett dolgozataimban közölve vannak.

*Mikola Sándor.*



## Kimutatás

*az 1916. év folyamán befolyt díjakról.*

*A Károly Irén-alapítványra adományozott :*

Károly Irén 2500 kor. (Hadikölcsön kötvény). Összesen ... 2500 K.

*Alapító tagsági díjat fizetett :*

Fényes Dezső 800 kor., Jordán Károly 200 kor., Kir. József-műegyetem könyvtára 200 kor., Mattyasóvszky Kasszián 200 kor. (hadikölcsön kötvény). Összesen ... 1400 K.

*Rendes tagsági díjat fizetett :*

**Az 1905. évre :** Gedő Miksa 2 kor. Összesen ... 2 K.

**Az 1906. évre :** Gedő Miksa 6 kor. Összesen ... 6 K.

**Az 1907. évre :** Héjas Endre 8 kor., Kötse István 6 kor.

Összesen ... 14 K.

**Az 1908. évre :** Farbaky István 6 kor., Héjas Endre 10 kor., Hubatsek Alajos 10 kor., Kisgyörgy János 6 kor., Kötse István 6 kor., Mátray Rudolf 6 kor. Összesen ... 44 K.

**Az 1909. évre :** Csibertics Imre 6 kor., Farbaky István 6 kor., Héjas Endre 10 kor., Kisgyörgy János 6 kor., Kötse István 6 kor., Mátray Rudolf 6 kor. Összesen ... 40 K.

**Az 1910. évre :** Bobita Endre 2 kor., Cholnoky Jenő 4 kor., Farbaky István 6 kor., Héjas Endre 10 kor., Képeßy Imre 10 kor., Kisgyörgy János 6 kor., Kötse István 6 kor., Mátray Rudolf 6 kor., Ráth A. Lajos 10 kor. Összesen ... 60 K.

**Az 1911. évre :** Bobita Endre 4 kor., Cholnoky Jenő 6 kor., Farbaky István 6 kor., Héjas Endre 10 kor., Képeßy Imre 10 kor., Kerekes Dezső 6 kor., Kisgyörgy János 2 kor., Mátray Rudolf 6 kor., Ráth A. Lajos 10 kor., Tatár Balázs 6 kor. Összesen ... 66 K.

**Az 1912. évre :** Farbaky István 6 kor., Héjas Endre 10 kor., Képeßy Imre 10 kor., Mátray Rudolf 6 kor., Ráth A. Lajos 10 kor., Tatár Balázs 6 kor. Összesen ... 48 K.

**Az 1913. évre :** Balog Mór 10 kor., Erdődy Imre 10 kor., Farbaky István 6 kor., Fejér Lipót 10 kor., Finkey József 6 kor.,

Geöcze Zoárd 10 kor., Héjas Endre 10 kor., Képesy Imre 10 kor., Mátray Rudolf 10. kor., Ráth A. Lajos 10 kor., Róna Zsigmond 10 kor., Simon Ferencz 6 kor., Tasch Antal 6 kor.,  
Összesen

114 K.

**Az 1914. évre:** Balog Mór 10 kor., Beke Manó 10 kor., Benda Jenő 10 kor., Farbaky István 6 kor., Fejér Lipót 10 kor., Finkey József 6 kor., Geöcze Zoárd 10 kor., Hanauer Jenő 10 kor., Héjas Endre 10 kor., Jakucs István 6 kor., Képesy Imre 10 kor., ifj. Konkoly-Thege Miklós 6 kor., Mátray Rudolf 10 kor., Ráth A. Lajos 10 kor., Róna Zsigmond 10 kor., Salamon Ernő 6 kor., Spiegel István 10 kor., Steiner Miklós 6 kor., Schwarz Ilona 10 kor., Szabó Lajos 6 kor., Tasch Antal 6 kor. Összesen

178 K.

**Az 1915. évre:** Albert Anna 6 kor., Balla József 6 kor., Bálint Elemér 10 kor., Beke Manó 10 kor., Bodola László 6 kor., Bricht Lipót 10 kor., Buchböck Gusztáv 10 kor., Bauer Klára 10 kor., Csonka Mihály 6 kor., Csengery Piroksa 6 kor., Czákó Adolf 10 kor., Demeczky Mihály 10 kor., Eltscher Simon 6 kor., Farkas Gyula 10 kor., Fodor László 6 kor., Grosschmid Lajos 10 kor., Halász Ernő 10 kor., Hanauer Jenő 10 kor., Hang Dániel 6 kor., Hatvani Ede 10 kor., Hauszmann Alajos 10 kor., Havas Miksa 10 kor., Héjas Endre 2 kor., Hercz Szidónia 6 kor., Haich Sarolta 6 kor., Jakucs István 6 kor., Juckel Gyula 10 kor., Kherndl Antal 10 kor., Király László 6 kor., Kiss Dénes 6 kor., Klatt Román 6 kor., Klug Lipót 6 kor., Klupathy Jenő 10 kor., ifj. Konkoly-Thege Miklós 6 kor., Kovács Ferencz 6 kor., Kövesligethy Radó 10 kor., Kálmán József 6 kor., Kempner Magda 6 kor., Loykó Béla 6 kor., Marcell György 10 kor., Mátray Rudolf 10 kor., Milakovszky László 6 kor., Nagy Balázs 6 kor., Sz. Nagy Gyula 6 kor., Neustadt Lipót 10 kor., Olta Károly 10 kor., Pecz Samu 10 kor., Pék János 6 kor., Prokesch Ignác 6 kor., Pogátsa János 6 kor., Ráth A. Lajos 10 kor., Rejtő Sándor 10 kor., Rigó Ferencz 10 kor., Rybár István 10 kor., Rhorer László 10 kor., Sós Ernő 10 kor., Steiner Lajos 10 kor., Straub Sándor 10 kor., Soós Sándor 6 kor., Szabó József 6 kor., Szarvas Lajos 6 kor., Szépréthy Béla 6 kor., Szmodics Kázmér 6 kor., Tasch Antal 6 kor., Tomits Iván 10 kor., Ujj Gyula 10 kor., Vörös Cyrill 10 kor., Walther Béla 6 kor., Weber Márton 6 kor., Winter József 10 kor., Wodetzky József



10 kor., Závodszy Adolf 10 kor., Zemplén Győző 10 kor.

Összesen

586 K.

**Az 1916. évre:** Ábrahám István 10 kor., Anderkó Aurél 10 kor., Arany Dániel 10 kor., Albert Anna 4 kor., Bak Elza 10 kor., Balla József 6 kor., Baranyi Balázs 6 kor., Bauer Mihály 10 kor., Bálint Elemér 10 kor., Beke Manó 10 kor., Bertram Brunó 6 kor., Bielek Miksa 10 kor., Bodola Lajos 10 kor., Bogyó Samu 10 kor., Borossay Dávid 6 kor., Bozóky Endre 10 kor., Bricht Lipót 10 kor., Buchböck Gusztáv 10 kor., Bauer Klára 10 kor., Bresztovszky Béla 10 kor., Ballenegger Andor 10 kor., Bratu János 6 kor., Csizhegyi Lajos 6 kor., Csopey László 10 kor., Czekeliusz Aurél 10 kor., Csonka Mihály 6 kor., Csősz László 6 kor., Dávid Lajos 10 kor., Demeter István 6 kor., Dombay Nárcisz 6 kor., Domonkos Kálmán 6 kor., Éber József 10 kor., Ellend József 6 kor., Farkas Gyula 10 kor., Félegyházi Antal 6 kor., Frank István 6 kor., Fraunhoffer Lajos 10 kor., Fenyvesi Andor 6 kor., Gidró Bonifác 6 kor., Goldziher Károly 10 kor., Grosschmid Lajos 10 kor., Gálffy Lajos 6 kor., Halász Ernő 10 kor., Hanauer Jenő 10 kor., Heller Richárd 6 kor., Heuer Ede 10 kor., Hirschmann Nándor 6 kor., Hortobágyi Zsigmond 6 kor., Hercz Szidónia 6 kor., Hajós Géza 6 kor., Hoffmann Ernő 10 kor., Jakucs István 6 kor., Jánosi Imre 10 kor., Javorik János 6 kor., Karai Sándor 6 kor., Király László 6 kor., Kiss Dénes 6 kor., Klatt Román 6 kor., Klug Lipót 6 kor., Koren Dénes 10 kor., Koschovitz Gyula 10 kor., Kovács Ferencz 6 kor., König Dénes 10 kor., Kövesligethy Radó 10 kor., Kilczér Gyula 10 kor., Kálmán József 6 kor., Lendvai Hugó 6 kor., Luckhaub Gyula 6 kor., Loykó Béla 6 kor., Magdics Gáspár 6 kor., Marczell György 10 kor., Mihálovits Alajos 6 kor., Müller József 10 kor., Nagy Balázs 6 kor., Neumann Jenő 6 kor., Nyáry Béla 6 kor., Nyíró Jolán 6 kor., Neuhold Özséb 6 kor., Ortway Rudolf 6 kor., Oszlaczky Szilárd 10 kor., Oltay Károly 10 kor., Palatin Gergely 6 kor., Pécsi Albert 10 kor., Petry Gyula 6 kor., Pogány Béla 6 kor., Pogány Iduna 10 kor., Pogátsa János 6 kor., Privorszky Alajos 10 kor., Rados Gusztáv 10 kor., Rados Ignác 10 kor., Ráth A. Lajos 10 kor., Rátz László 10 kor., Richter Rezső 10 kor., Riegl Sándor 6 kor., Rucsinszki Lajos 10 kor., Rybár István 10 kor., Rhorer László 10 kor., Renner J. Lajos 6 kor., Schuller Alajos 10 kor., Selényi Pál 10 kor., Sinkó József 6 kor., Steiner Lajos 10 kor., Straub L. Gyula 6 kor.,

Soós Sándor 6 kor., Sasvári Géza 10 kor., Szarvas Lajos 6 kor., Székely Károly 6 kor., Szépréthy Béla 6 kor., Szmodics Kázmér 6 kor., Szabó Jenő 6 kor., Szántó Fidél 6 kor., Tertyánszky Sándor 6 kor., Tötössy Béla 10 kor., Tomits Iván 10 kor., Tillinger Stefánia 10 kor., Vajnóczky István 10 kor., Virág Oszkár 10 kor., Winter József 10 kor., Wodetzky József 10 kor., Woyciechowsky József 10 kor., Zemplén Géza 10 kor., Zemplén Győző 10 kor., Zipernovszky Károly 10 kor. Összesen ..... 992 K.

**Az 1917. évre:** Frank István 6 kor., Bálint Elemér 10 kor., Gálffy Lajos 6 kor., Gidró Bonifác 6 kor., Groschmid Lajos 10 kor., Ilosvay Lajos 10 kor., Jakucs István 6 kor., Neuhold Özséb 6 kor., Oltvay Rudolf 6 kor., Petry Gyula 6 kor., Pogány Béla 6 kor., Riegl Sándor 6 kor., Rybár István 10 kor., Selényi Pál 10 kor., Szőke Béla 10 kor., Tihanyi Miklós 6 kor., Tomits István 6 kor., Walek Károly 6 kor. Összesen ..... 132 K.

**Az 1918. évre:** Frank István 6 kor., Pap János 4 kor., Walek Károly 6 kor. Összesen ..... 16 K.

**Az 1919. évre:** Frank István 6 kor., Pap János 2 kor. Összesen ..... 8 K.

*Előfizetési díjat fizetett:*

**Az 1909. 1910. és 1911. évre:** Budapesti V. ker. áll. főgimnázium 10—10 kor. Összesen ..... 30 K.

**Az 1912. évre:** Budapesti V. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Késmárki ág. h. ev. lyceum 10 kor., Szentesi áll. főgimnázium 10 kor. Összesen ..... 30 K.

**Az 1913. évre:** Budapesti V. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Mármaroszigeti ref. lyceum 10 kor., Szentesi áll. főgimnázium 10 kor. Összesen ..... 30 K.

**Az 1914. évre:** Budapesti V. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Kaposvári áll. főgimnázium 10 kor., Kilián Frigyes 10 kor., Máramaroszigeti ref. lyceum 10 kor., Szentesi áll. főgimnázium 10 kor. Összesen ..... 50 K.

**Az 1915. évre:** Brassói áll. főreáliskola 10 kor., Budapesti V. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Dési áll. főgimnázium 10 kor., Fiumei áll. főgimnázium 4 kor., Jászberényi áll. főgimnázium 4 kor., Kaposvári áll. főgimnázium 10 kor., Kézdivásárhelyi r. k. főgimnázium 10 kor., Kistűszállási ref. főgimnázium 10 kor., Kolozsvári egyetemi ábrázoló mértani intézet



10 kor., Kőrmöczbányai áll. realiskola 10 kor., Kilián Frigyes 10 kor., Lugosi áll. főgimnázium 4 kor., Máramarosszigeti ref. lyceum 10 kor., Nagyváradi áll. főrealiskola 10 kor., Sepsi-szentgyörgyi ref. főgimnázium 10 kor., Stark Ferencz 10 kor., Székelyudvarhelyi r. k. főgimnázium 4 kor., Szentesi áll. főgimnázium 10 kor., Szolnoki áll. polg. fiúiskola 6 kor., Ujvidéki kir. kath. főgimnázium 10 kor. Összesen 172 K.

**Az 1916. évre :** Békéscsabai ág. h. ev. Rudolf-főgimnázium 10 kor., Budapesti V. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti VI. ker. áll. főrealiskola 10 kor., Budapesti VIII. ker. áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti X. ker. (kőbányai) áll. főgimnázium 10 kor., Budapesti Norbertinum főkormányzósága 10 kor., Budapesti ciszt. r. tanárképző előjárósága 10 kor., Budapesti m. kir. tudományegyetem könyvtára 10 kor., Budapesti nyilván. városi könyvtár 10 kor., Debreczeni áll. főrealiskola 10 kor., Debreczeni ref. főgimnázium 10 kor., Dombóvári kir. kath. főgimnázium 10 kor., Erzsébetvárosi áll. főgimnázium 10 kor., Egri áll. főrealiskola 10 kor., Fogarasi áll. főgimnázium 10 kor., Fiumei áll. főgimnázium 2 kor., Győri áll. főrealiskola 10 kor., Gyulai róm. kath. főgimnázium 10 kor., Gyulafehérvári róm. kath. főgimnázium 10 kor., Gyergyószentmiklósi áll. főgimnázium 6 kor., Gabrowitz Ede 10 kor., Hajdúnánási ref. főgimnázium 10 kor., Jászói prépostság könyvtára 10 kor., Jászberényi áll. főgimnázium 2 kor., Jászapáti kir. kath. főgimnázium 10 kor., Karczagi ref. főgimnázium 10 kor., Kecskeméti áll. főrealiskola 10 kor., Kolozsvári egyetemi ábrázoló mértani intézet 10 kor., Kilián Frigyes 20 kor., Kecskeméti ref. főgimnázium 10 kor., Lőcsei áll. főrealiskola 10 kor., Lugosi áll. főgimnázium 2 kor., Makói áll. főgimnázium 10 kor., Máramarosszigeti áll. felső leányiskola 10 kor., Máramarosszigeti ref. lyceum 10 kor., Marosvásárhelyi róm. kath. főgimnázium 10 kor., Miskolczi ref. főgimnázium 10 kor., Nagykállói áll. főgimnázium 10 kor., Nagyváradi róm. kath. tanítónőképző 6 kor., Ógyallai csillagvizsgáló-intézet 10 kor., Pannonhalmi főapátsági könyvtár 10 kor., Soproni ág. h. ev. lyceum 10 kor., Soproni áll. főrealiskola 10 kor., Stark Ferencz 10 kor., Szabadkai városi főgimnázium 10 kor., Szarvasi ág. h. ev. főgimnázium 10 kor., Szekszárdi áll. főgimnázium 10 kor., Székelyudvarhelyi r. k. főgimnázium 6 kor., Szentesi

áll. főgimnázium 10 kor., Szászvárosi ref. Kún-kollégium 10 kor.,  
 Temesvári áll. főgimnázium 10 kor., Temesvári áll. főreáliskola  
 10 kor., Temesvári felső kereskedelmi iskola 10 kor. Összesen 514 K.

**Az 1917. évre :** Egri ciszt. r. főgimnázium önképző-  
 köre 10 kor. Összesen ..... 10 K.

*Összesen befolyt :*

Károly Irén-alapítványra .....	2500 K.
Alapító tagdíjából .....	1400 „
Hátralékos tagdíjából .....	1158 „
Folyó és jövő évi tagsági díjából .....	1148 „
Előfizetési díjából .....	836 „

Összesen : 7042 K.

*Budapestén, 1916. évi deczember hó 31-én.*

*Privorszky Alajos*  
*pénztárnok.*



# MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három ívnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K. A Matematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

26. évfolyam. 1917. április—május. 4—5. füzet.

## AZ ALGEBRAI EGYENLETEK VALÓS GYÖKEINEK MEGHATÁROZÁSA ITERÁRCZIÓVAL.

### 1. Legyen

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

valós együtthatójú algebrai egyenlet, melynek legalább egy valós gyöke van. E dolgozat főcélja oly iterácziók képezése, melyek az  $\alpha$ ),  $\beta$ ),  $\gamma$ ) tulajdonságokkal rendelkeznek.

#### a) A

$$z_1, z_2, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots \quad (2)$$

sorozat, mely a

$$z_{i+1} = F(z_i) \quad (3)$$

formulából származik, *mindig*, azaz  $z_1$  minden valós értékére konvergens.  $\beta$ ) A sorozat határértéke az (1) egyenlet valamely valós gyöke; kivétel csakis a

$$z_1 = z_2 = \dots = z_i = z_{i+1} = \dots$$

esetekben léphet fel.  $\gamma$ ) Az (1) egyenlet minden valós gyöke elérhető a (3) iteráczióval.

Arra az esetre, midőn (1) összes gyökei valósak, már FABER<sup>1</sup> szerkesztett ily iterácziókat.

2. Mindenekelőtt a következő feladattal fogunk foglalkozni. Iteráczió által meghatározandó az (1) egyenlet ama valós gyöke, mely az adott  $z_1$  valós számnál közvetlenül nagyobb, illetőleg kisebb; feltéve, hogy ily gyök van. Ezt a feladatot először

<sup>1</sup> Über die Newtonsche Näherungsformel. Crelle Journal f. r. u. a. Math. 138. k. 1. l. V. ö. a dolgozat 5. §-át.

LEGENDRE<sup>1</sup> oldotta meg. GALOIS<sup>2</sup> a LEGENDRE-féle methodust egyszerűsítette. Később ugyanezt a feladatot csupa valós gyök esetére LAGUERRE<sup>3</sup> újból tárgyalta. TAUBER<sup>4</sup> a LAGUERRE-féle feladat megoldására a NEWTON-féle eljárást használta fel. Mi a feladatot kétféleképp fogjuk megoldani. Az első megoldás nagyon egyszerű és közelfekvő, a második, komplikáltabb eljárás alkalmas lesz mindig konvergens iterációk képzésére.

3. Legyen  $M$  az (1) egyenlet összes gyökei abszolút értékeinek felső korlátja, legyen továbbá  $z_1$  oly valós érték, melyre

$$-M \leq z_1 \leq M$$

és az  $A$  pozitív szám elégítse ki az

$$A > (2M)^{n-1}$$

követelést. Akkor a következő tételek bizonyíthatók be:

I. A

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= F(z_i) \\ F(z) &= z + \left| \frac{f(z)}{A} \right| \end{aligned} \quad (4)$$

formulából származó

$$z_1, z_2, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots \quad (5)$$

sorozat az (1) ama valós gyökéhez konvergál, mely  $z_1$ -nél közvetlenül nagyobb; feltéve, hogy ilyen van (és  $z_1$  nem gyöke (1)-nek).

II. A

$$\begin{aligned} z_{i+1} &= F(z_i) \\ F(z) &= z - \frac{|f(z)|}{A} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> V. ö. Zahlentheorie von A.—M. Legendre. Nach der dritten Auflage ins Deutsche übertragen von H. MASER. Zweite Ausgabe. Zweiter Band 384. l.

<sup>2</sup> Oeuvres mathématiques d'Evariste Galois, 13. l.

<sup>3</sup> Oeuvres t. 1. 104. l.

<sup>4</sup> Über die Newtonsche Näherungsmethode. Wiener Monatshefte f. Math. und Phys. VI, 291. l.



formulából származó sorozat a  $z_1$ -nél közvetlenül kisebb valós gyökhöz konvergál; feltéve, hogy ilyen van (és  $z_1$  nem gyöke (1)-nek).

Csak az I. tétellel kell részletesebben foglalkozni. Jelöljük az (1)-nek tetszőleges (valós vagy komplex) gyökét  $\zeta_k$ -val, míg a  $z_1$ -nél közvetlen nagyobb valós gyök legyen  $\zeta_r$ . Először is

$$z_1 < z_2 < \dots < z_i < z_{i+1} < \dots;$$

ámde  $\zeta_r$  e sorozatnak felső korlátja. E célból elég kimutatni, hogy

$$\frac{|f(z)|}{A} \leq |z - \zeta_r|, \quad (6)$$

ha

$$-M \leq z \leq M.$$

Ez azonban nagyon egyszerű, mert

$$f(z) = \prod_{k=1}^n (z - \zeta_k)$$

és így

$$|f(z)| \leq |z - \zeta_k| (M + M)^{n-1},$$

hol  $\zeta_k$  az (1) egyenlet tetszőleges gyöke, tehát

$$\frac{|f(z)|}{A} \leq |z - \zeta_r|.$$

(Az egyenlőségi jel akkor és csak akkor érvényes, ha  $z = \zeta_r$ .)

Az (5) sorozatnak van határértéke; ha ezt  $L$ -lel jelöljük, akkor

$$z_1 < L \leq \zeta_r.$$

Kimutatható, hogy  $L = \zeta_r$ . Ugyanis (4)-ből:

$$L = F(L),$$

$L$  tehát gyöke a

$$F(z) - z = \frac{|f(z)|}{A} = 0$$

egyenletnek és így

$$f(L) = 0, \quad L = \zeta_r, \quad \text{q. e. d.}$$

Figyelemreméltó, hogy a most adott iterációkban a nevező konstans.<sup>1</sup> Ha  $z_1$  a  $-R$  és  $R$  között fekszik és  $R$  felső korlátja az (1) összes valós gyökei abszolút értékeinek, akkor  $A$  a nála nem nagyobb

$$A = (R+M)^{n-1}$$

számmal helyettesíthető. Egy más konstans-meghatározást kapunk a következő módon, melyre FEJÉR úr figyelmeztetett. Az

$$\frac{f(z)}{z-\zeta_r} = \frac{f(z) - f(\zeta_r)}{z-\zeta_r}$$

identitásból a középértéktétellel

$$\frac{|f(z)|}{B} \leq |z-\zeta_r|$$

adódik, hol  $B$  az  $|f'(z)|$  felső korlátja a

$$-R < z < R$$

intervallumban. Abban az esetben is, midőn  $f(z)$  nem polynom, elérhető a  $z_1$ -nél közvetlen nagyobb, illetőleg kisebb zérus hely, mely  $a$  és  $b$  között fekszik ( $a < z_1 < b$ ) konstans nevezőjű iterációval. Ha ugyanis az

$$a \leq z \leq b \tag{7}$$

intervallumban  $f(z)$  folytonos és ( $a, b$  kizárásával) differenciálható, ha továbbá a  $D$  szám  $|f'(z)|$ -nek felső korlátja, akkor érvényes a következő könnyen bebizonyítható tétel, melyet FEJÉR úr közlésének köszönhetek. Az

$$a < z_0 < b, \quad f(z_0) \neq 0$$

egyenlőtlenségekből következik, hogy  $f(z)$ -nek a (7) intervallumban nincs oly  $\zeta$  zérus helye, mely a

---

<sup>1</sup> V. ö. L. von SCHRUTKA. Ein Mittel zur Vermeidung etc. Zeitschrift für Math. und Phys. 60. k., 294. l.



$$z_0 - \frac{|f(z_0)|}{D} < \zeta < z_0 + \frac{|f(z_0)|}{D}$$

relációkat kielégíténé.

4. A tárgyalt feladatot még a következő tételekkel is megoldhatjuk.

I<sup>†</sup> Ha  $z_1$  tetszőleges valós szám, akkor a

$$z_{i+1} = F(z_i) \\ F(z) = z + \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right|, \quad g(z) = (|z| + M)^{n-1}$$

formulából kiadódó

$$z_1, z_2, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots \quad (8)$$

sorozat az (1) egyenlet ama valós gyökéhez konvergál, mely  $z_1$ -nél közvetlen nagyobb; feltéve, hogy ilyen van (és  $z_1$  nem gyöke (1)-nek). A bebizonyításból látható, hogy a (8) konvergenciája a gyök létezésének szükséges és elegendő feltétele.

II<sup>†</sup> A

$$z_{i+1} = F(z_i) \\ F(z) = z - \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right|, \quad g(z) = (|z| + M)^{n-1}$$

formulából származó sorozat a  $z_1$ -nél közvetlen kisebb gyökhöz konvergál; feltéve, hogy ilyen van (és  $z_1$  nem gyöke (1)-nek). A sorozat konvergenciája a gyök létezésének szükséges és elegendő feltétele.

Az előbbiek szerint csak azt kell megmutatni, hogy

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq |z - \zeta_h|,$$

ha  $\zeta_h$  az (1) egyenlet tetszőleges valós gyöke. Ez azonban tényleg úgy van, mert

$$|f(z)| \leq |z - \zeta_h| (|z| + M)^{n-1}, \quad g(z) = (|z| + M)^{n-1}.$$

Még látható, hogy  $g(z)$  sokkal egyszerűbben is választható. Ugyanis  $g(z)$  helyébe tetszőleges  $m$ -edfokú ( $m \geq n-1$ ) polinom tehető, melynek nincs valós zérushelye, ha azt még egy alkal-

mas számértékkel szorozzuk, mert csak arról kell gondoskodni, hogy  $z$  minden valós értékére

$$\left| \frac{\frac{f(z)}{z - \zeta_h}}{g(z)} \right| < 1$$

legyen; itt  $\zeta_h$  az (1) egyenlet tetszőleges valós gyöke. Az egyenlőtlenség kielégíthető, mert a baloldal  $z = \infty$ -re véges marad.

5. Ha az egyenlet fokszáma,  $n$  páratlan, akkor a

$$z_{i+1} = F(z_i) \\ F(z) = z - \frac{f(z)}{(|z| + M)^{n-1}} \quad (9)$$

formulából származó sorozat  $z_1$  minden valós értékére konvergens, még pedig az iteráció a  $z_1$ -nél közvetlenül nagyobb, illetőleg kisebb valós gyököt éri el aszerint, amint  $f(z_1)$  negatív, illetőleg pozitív.<sup>1</sup> Állításunk 4. alapján evidens, ha még meggondoljuk, hogy a legkisebb valós gyökön innen, illetőleg a legnagyobb valós gyökön túl  $f(z)$  negatív, illetőleg pozitív. Ámde ezen az úton nem kapjuk meg az összes gyököket és  $n$ -nek is páratlannak kell lenni. Ha az (1) egyenlet összes gyökei valósak, könnyen kiküszöbölhetjük e bajt. Legyenek az (1) különböző valós gyökei

$$\zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_l; \quad (10)$$

legyenek továbbá  $f'(z) = 0$ -nak (10) alatti értékektől különböző gyökei

$$\zeta'_1 < \zeta'_2 < \dots < \zeta'_{l-1}, \quad (10^*)$$

akkor ismeretes, hogy

$$\zeta_1 < \zeta'_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_l. \quad (10^{**})$$

A

$$\varphi(z) = \frac{1}{n} f(z) f'(z) = 0$$

<sup>1</sup> Ha  $f(z_1) = 0$ , akkor  $z_1 = z_2 = \dots$ .



$2n-1$ -edfokú egyenletnek csupa valós és páratlan multiplicitású gyöke van (a  $(10^{**})$  alatti mennyiségek), úgy hogy  $\varphi(z)$  előjele a

$$(-\infty, \zeta_1), (\zeta_1, \zeta_1'), \dots, (\zeta_l, +\infty) \quad (11)$$

intervallumokban felváltva negatív, illetőleg pozitív. Az

$$F(z) = z - \frac{\varphi(z)}{(|z| + M)^{2n-2}}$$

formulából származó iteráció minden valós  $z_1$  értékre konvergens. Ha  $z_1$  a (11) intervallumok valamelyikének belső pontja, akkor a sorozat határértéke az intervallum ama végpontja, mely (1)-nek gyöke. Ha  $z_1$  a  $(10^{**})$  alatti értékek valamelyike, akkor  $z_1 = z_2 = \dots$ .

Az  $F(z)$  formulájában a nevező helyett bármely  $m$ -ed fokú ( $m \geq 2n-2$ ) polynom tehető, melynek valós zérushelye nincs, ha a polynomot még egy alkalmas számértékkel megszorozzuk.<sup>1</sup> Ha (1)-nek nem minden gyöke valós, akkor is végtelen sok oly mindig konvergens iteráció létezik, mely (1) összes valós gyökeit eléri. Legyenek pl. (1) összes valós gyökei egyszerűek, válasszuk a valós  $\zeta_l''$  értékeket a

$$\zeta_1 < \zeta_1'' < \zeta_2 < \dots < \zeta_{l-1}'' < \zeta_l$$

egyenlőtlenségeknek megfelelő módon és tegyük

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= f(z) h(z), \\ h(z) &= (z - \zeta_1'') \dots (z - \zeta_{l-1}''), \end{aligned}$$

akkor

$$F(z) = z - \frac{\varphi(z)}{(|z| + M)^{n+l-2}}$$

követeléseinknek megfelel, a mi abból következik, hogy  $n+l-1$  páratlan szám.

6. Könnyű a (8) alatti sorozat konvergenciájának módját

<sup>1</sup> Az  $f'(z)$  tényező is megváltoztatható.

megvizsgálni. (Ha  $g(z) = A$ , akkor az (5) sorozatot kapjuk.)  
Ugyanis

$$\zeta_r = \lim z_i = z_1 + (z_2 - z_1) + \dots + (z_{i+1} - z_i) + \dots = \\ = u_2 + u_3 + \dots + u_i + \dots$$

Ha  $z_1$  nem gyöke (1)-nek, akkor  $u_i \neq 0$ .<sup>1</sup> Az  $u_i$ -k számára bebizonyítható, hogy

$$\lim \frac{u_{i+1}}{u_i} = 1 - \left| \frac{f'(\zeta_r)}{g(\zeta_r)} \right|. \quad (12)$$

Ugyanis

$$u_{i+1} = \left| \frac{f(z_i)}{g(z_i)} \right|, \quad \frac{u_{i+1}}{u_i} = \left| \frac{f(z_i)}{f(z_{i-1})} \right| \left| \frac{g(z_{i-1})}{g(z_i)} \right|,$$

a második tényező határértéke 1, tehát

$$\lim \frac{u_{i+1}}{u_i} = \lim \left| \frac{f(z_i)}{f(z_{i-1})} \right|.$$

Ámde

$$\frac{f(z_i)}{f(z_{i-1})} = \frac{\left( z_{i-1} + \left| \frac{f(z_{i-1})}{g(z_{i-1})} \right| \right)^n + a_1 \left( z_{i-1} + \left| \frac{f(z_{i-1})}{g(z_{i-1})} \right| \right)^{n-1} + \dots + a_n}{f(z_{i-1})} = \\ = 1 + \frac{f'(z_{i-1})}{f(z_{i-1})} \left| \frac{f(z_{i-1})}{g(z_{i-1})} \right| + \dots;$$

ahol a következő tagok  $f(z_{i-1})$ -nek pozitív kitevőjű hatványát tartalmazzák, miből (12) evidens. A konvergenciából minden számítás nélkül következik, hogy, ha  $\zeta_r$  egyszerű gyök,

$$0 < \left| \frac{f'(\zeta_r)}{g(\zeta_r)} \right| \leq 1,$$

ami a

$$\frac{f'(\zeta_r)}{g(\zeta_r)} = \left[ \frac{f(z)}{g(z)} \right]_{z=\zeta_r}'$$

<sup>1</sup> Csak akkor, ha az (1) egyenlet gyökei között van  $\pm M$ -mel egyenlő, léphet fel az  $u_i$ -k között a zérus is. Ez esetben az  $u_i$  mennyiségek egy bizonyos indextől kezdve mind zérusok.



formulából is látszik. Még megjegyezhető, hogy ha  $\zeta_r$  egyszerű gyök, akkor a

$$\frac{\zeta_r - z_i}{f'(\zeta_r) - f'(z_i)} = \frac{\zeta_r - z_i}{-f'(z_i)}$$

hányados elég nagy  $i$ -re állandó előjelű és abszolút értékre egy  $H$  korláton alul marad, úgy hogy

$$0 < \zeta_r - z_i < H|f'(z_i)|.$$

Ha a  $z_1$  kezdőérték «alkalmasan» van választva, akkor ismeretes módon a

$$F(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

formulát használó NEWTON-féle iteráció a  $\zeta_r$  gyökhöz tart. Ismeretes továbbá, de az előzőkből is látható, hogy

$$\lim \frac{u_{i+1}}{u_i} = 0,$$

ha  $\zeta_r$  egyszerű gyök.

7. A NEWTON-féle eljárás esetében is előfordulhat, hogy  $z_1$  tetszőleges módon választható. Legyenek (1) gyökei

$$\zeta_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

akkor érvényesek a következő tételek.<sup>1</sup>

III. Ha

$$\beta_1 = 0, \quad \alpha_k \geq \alpha_1$$

akkor a  $(-\infty, \zeta_1)$  intervallumban az iteráció a  $\zeta_1$  gyökhöz konvergál.

IV. Ha

$$\beta_n = 0, \quad \alpha_k \leq \alpha_n,$$

akkor a  $(\zeta_n, +\infty)$  intervallumban az iteráció a  $\zeta_n$  gyökhöz konvergál.

Ezek a tételek különböző megfontolások alapján könnyen

<sup>1</sup> V. ö. TAUBER i. h.

levezethetők. Mi csak az előzőkre akarunk hivatkozni. Bebizonyítandó, hogy a  $(-\infty, \zeta_1)$ , illetőleg  $(\zeta_n, +\infty)$  intervallumokban

$$\left| \frac{f(z)}{f'(z)} \right| < |z - \zeta_1|, \text{ illetőleg } \left| \frac{f(z)}{f'(z)} \right| < |z - \zeta_n|.$$

Emez egyenlőtlenségek igazsága következik a

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{1}{z - \zeta_1} + \frac{1}{z - \zeta_2} + \dots + \frac{1}{z - \zeta_n} = \Re^1 \left( \frac{f'(z)}{f(z)} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{z - a_k}{(z - a_k)^2 + \beta_k^2} \end{aligned} \quad (13)$$

formulából, mert az összeg jele alatt az egyes tagok előjelei ugyanazok. Tovább is következtethetünk:

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \left| \frac{n}{z - \zeta_1} \right|, \text{ illetőleg } \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \left| \frac{n}{z - \zeta_n} \right|;$$

ha tehát

$$z_{i+1} = z_i - \frac{f(z_i)}{f'(z_i)},$$

akkor

$$|z_i - \zeta_1| \leq n(z_{i+1} - z_i), \text{ illetőleg } 0 < z_i - \zeta_n \leq n|z_{i+1} - z_i|.$$

Még kiolvasható (13)-ból, hogy az  $|z_{i+1} - z_i|$  mennyiség állandóan fogy, ha az összes gyökök valóságok.

*Bauer Mihály.*

---

<sup>1</sup>  $\Re$  jelentése: realis rész.



## VÉGTELEN SOROZATOK INTEGRÁLÁSÁRÓL.

Az alábbiakban egy nagyon elemi bizonyítását adom Osgood azon tételének, mely szerint *minden olyan  $\{f_n(x)\}$  korlátos függvénysorozat, mely egy  $ab$  számközben értelmezett folytonos függvényekből áll és egy ugyanilyen  $f(x)$  függvény felé tart, tagonként integrálható.*<sup>1</sup> Az itt közölt bizonyítást a LEBESGUE-féle integrál elméletére vonatkozó, általánosabb jellegű vizsgálataim folyamán találtam; ezekről a vizsgálatokról más helyen számolok be.<sup>2</sup> Ismeretes, hogy a LEBESGUE-féle elméletben a megfelelően általánosított OSGOOD-féle tétel<sup>3</sup> különösen fontos szerepet játszik; viszont az eredeti OSGOOD-féle tétel annak idején korántsem részesült olyan méltánylásban és nem terjedt úgy el, mint az klasszikus tételeknek ilyen egyszerű, az analízis elemeibe tartozó általánosítását megillette volna. Azt hiszem, hogy ez az ismeretlenség különösen azon mult, hogy szerzője a tételt egyéb eredmények között szinte elrejtve közölte.

Hogy az ígért bizonyításra térjek, először is megjegyzem,

---

<sup>1</sup> W. F. OSGOOD: *Non-uniform convergence and the integration of series term by term*. American Journal, vol. XIX. (1897), p. 155—190.

<sup>2</sup> F. RIESZ: *Sur l'intégrale de Lebesgue* (megjelenik az Acta mathematica-ban); l. még: *Sur quelques points de la théorie des fonctions somposables*, Comptes rendus, le 4 mars 1912.

<sup>3</sup> H. LEBESGUE: *Intégrale, longueur, aire*, Thèse, Paris 1902 és *Leçons sur l'intégration*, Paris 1904, p. 114. A RIEMANN-féle értelemben integrálható függvényekre a tételt már C. ARZELÁ kiterjesztette: *Sulle serie di funzioni* (parte seconda), Memorie d. Accad. di Bologna 1900, p. 701—744, l. különösen p. 723/4. A jelen dolgozatban adott bizonyítás erre az esetre könnyen kiterjeszthető.

hogy az általános eset közvetlenül visszavezethető arra az esetre, midőn az  $f_n(x)$  függvények nem-negativok,  $f(x)$  határfüggvényük pedig azonosan zéró. Ugyanis az

$$|f_n(x)| < G \quad (n=1, 2, \dots)$$

föltevésből következik, hogy

$$|f(x)| \leq G$$

és ennél fogva

$$|f_n(x) - f(x)| < 2G;$$

minthogy továbbá az

$$f_n(x) \rightarrow f(x)$$

föltevésből az

$$|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

reláció is folyik és végül az  $f_n(x)$  és  $f(x)$  függvényekkel együtt az  $|f_n(x) - f(x)|$  függvények is folytonosak, azért, ha a tétel az említett speciális esetben érvényes, akkor a tételt az  $\{|f_n(x) - f(x)|\}$  sorozatra alkalmazva:

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \rightarrow 0;$$

ebből pedig az

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx$$

egyenlőtlenség fölhasználásával következik a kívánt

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

határegyenlőség.

Csupán azt kell tehát megmutatnunk, hogy egy folytonos és nem-negativ  $f_n(x)$  függvényekből alkotott korlátos függvény-sorozatra nézve, mely az  $ab$  számközben mindenütt zéró felé tart,

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow 0.$$



Tegyük még egyelőre azt is fel, hogy

$$f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \quad (n=1, 2, \dots),$$

azaz hogy a sorozat monoton fogy. Akkor DINI egy jól ismert tétele szerint a konvergencia egyenletes és ennél fogva jogsult a tagonként való integrálás. A DINI-féle tétel fölhasználása nélkül így is okoskodhatunk: Az  $f_n$  függvények integráljai egy nem-negatív számokból álló, monoton fogyó sorozatot alkotnak, mely tehát egy

$$I_0 \geq 0$$

határérték felé tart. Osszuk föl az  $ab$  közt két egyenlő részre; akkor hasonló jelenség érvényes a két részre külön-külön; a megfelelő határértékek összege  $I_0$ , és így azok közül legalább az egyik nagyobb vagy akkora, mint  $\frac{I_0}{2}$ . Jelöljük az illető határértéket  $I_1$ -gyel:

$$I_1 \geq \frac{I_0}{2}.$$

További, vég nélkül folytatott felezéssel az egymásban foglalt  $a_k b_k$  közők végtelen sorozatát értelmezzük, melyek egy egyetlen közös  $x^*$  pontba zsugorodnak össze; a  $k$ -adik felezésnél nyert köznek megfelelő határérték:

$$I_k \geq \frac{I_0}{2^k}.$$

Jelentsen most  $\varepsilon$  egy tetszésszerint kicsiny pozitív számot; akkor, minthogy  $f_n(x) \rightarrow 0$  és így speciálisan  $f_n(x^*) \rightarrow 0$ , azért létezik olyan  $n$  index, hogy

$$f_n(x^*) < \frac{\varepsilon}{2};$$

minthogy továbbá  $f_n(x)$  folytonos függvény, azért kijelölhető az  $x^*$  helynek egy olyan  $x^* - \delta < x < x^* + \delta$  környezete, melyben mindenütt

$$|f_n(x^*) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De akkor ezen környezet minden pontjában egyszersmind

$$f_n(x) < \varepsilon.$$

Másrészt a fent értelmezett számközök  $k$  elég nagy értékeinél már teljesen bennfoglaltatnak az  $(x^* - \delta, x^* + \delta)$  környezetben; ennél fogva ezen közökön

$$I_k \leq \int_{a_k}^{b_k} f_n(x) dx < \varepsilon (b_k - a_k) = \varepsilon \frac{b-a}{2^k}.$$

Viszont kiválasztási eljárásunk szerint

$$I_k \geq \frac{I_0}{2^k}.$$

Tehát, a két utolsó egyenlőtlenséget összehasonlítva:

$$I_0 \leq \varepsilon (b-a).$$

Minthogy  $\varepsilon$  tetszésszerint kicsiny, míg  $I_0$  független az  $\varepsilon$  megválasztásától, azért végül

$$I_0 = 0.$$

Ezzel a speciális esetet elintéztük.

Legyen most már  $\{f_n(x)\}$  egy tetszésszerinti, folytonos, nem-negatív függvényekből álló, korlátos sorozat, mely az  $ab$  számközben mindenütt zéró felé tart. Jelöljük  $f_m^n(x)$ -szel (a hol  $m \leq n$ ) azt az ugyancsak folytonos függvényt, mely minden egyes  $x$  helyen az  $f_m(x), f_{m+1}(x), \dots, f_n(x)$  értékek közül a *legnagyobb* egyenlő. Jelöljük továbbá  $I_m^n$ -nel az  $f_m^n(x)$  függvénynek  $a$ -tól  $b$ -ig vett integrálját. Ha az alsó  $m$  index változatlan marad, míg az  $n$  felső index végtelenbe nő, akkor az  $I_m^n$  számok növekvő sorozatot alkotnak; a sorozat korlátos, mert az  $f_k(x)$  függvényekkel együtt az  $f_m^n(x)$  függvények is a  $G$  korlát alatt maradnak és így

$$I_m^n < (b-a) G.$$

Ennél fogva a sorozat egy véges  $J_m$  határérték felé tart. Minthogy

$$f_m(x) \leq f_m^n(x),$$



azért

$$\int_a^b f_m(x) dx \leq I_m^n \leq J_m.$$

Ha tehát sikerül azt megmutatnunk, hogy

$$J_m \rightarrow 0,$$

úgy egyszersmind

$$\int_a^b f_m(x) dx \rightarrow 0,$$

és ezzel tételünk igazolva lesz.

Legyen  $\sigma$  egy tetszőszerint kicsiny pozitív szám és legyen  $n=n_1$  az első olyan index, melyre  $I_1^n > J_1 - \frac{\sigma}{2}$ ,  $n=n_2$  az első olyan  $n_1$  után következő index, melyre  $I_2^n > J_2 - \frac{\sigma}{4}$  s. i. t., általában  $n=n_m$  az első olyan  $n_{m-1}$ -re következő index, melyre

$$I_m^n > J_m - \frac{\sigma}{2^m}.$$

Végül jelentse  $g_m(x)$  azt az ugyancsak folytonos függvényt, mely minden egyes  $x$  helyen az

$$f_1^{n_1}(x), f_2^{n_2}(x), \dots, f_m^{n_m}(x)$$

értékek közül a *legkisebbel* egyenlő. Azt állítom, hogy

$$\int_a^b g_m(x) dx > J_m - \sigma \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) > J_m - \sigma.$$

Állításunk az  $m=1$  esetben föltevésünk értelmében helyes; ebben az esetben ugyanis  $g_1(x) = f_1^{n_1}(x)$ . Szabad tehát  $m-1$ -ről  $m$ -re következtetnünk. Föltesszük, hogy az állítás  $m-1$ -re helyes, azaz hogy

$$\int_a^b g_{m-1}(x) dx > J_{m-1} - \sigma \left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right).$$

Minthogy  $g_m(x)$  minden  $x$  helyen egyenlő a  $g_{m-1}(x)$  és  $f_m^{nm}(x)$  értékek közül a kisebbel vagy más szóval egyenlő a két érték összegével kivonva belőle a nagyobbikat, és ez utóbbi semmi esetre sem nagyobb mint  $f_{m-1}^{nm}(x)$ , azért

$$g_m(x) \leq g_{m-1}(x) + f_m^{nm}(x) - f_{m-1}^{nm}(x),$$

miből integrálással

$$\int_a^b g_m(x) dx \leq \int_a^b g_{m-1}(x) dx + I_m^{nm} - I_{m-1}^{nm}.$$

De föltevés szerint

$$\int_a^b g_{m-1}(x) dx > J_{m-1} - \sigma \left( 1 - \frac{1}{2^{m-1}} \right),$$

$$I_m^{nm} > J_m - \frac{\sigma}{2^m}, \quad I_{m-1}^{nm} \leq J_{m-1};$$

ennélfogva csakugyan

$$\begin{aligned} \int_a^b g_m(x) dx &> J_{m-1} - \sigma \left( 1 - \frac{1}{2^{m-1}} \right) + \\ &+ J_m - \frac{\sigma}{2^m} - J_{m-1} = J_m - \sigma \left( 1 - \frac{1}{2^m} \right) > J_m - \sigma. \end{aligned}$$

Állításunk tehát minden  $m$ -re helyes.

Másrészt azonban a  $g_m(x)$  függvények fogyó sorozatot alkotnak és

$$g_m(x) \leq f_m^{nm}(x) = f_v(x),$$

a hol  $v$  egy általában  $x$ -től is függő index, tudniillik az  $m, m+1, \dots, n_m$  indexek valamelyike; számunkra csak az a lényeges, hogy  $v \geq m$  és így  $m$ -mel együtt végtelenbe tart. Minthogy ugyanis

$$f_v(x) \rightarrow 0, \quad 0 \leq g_m(x) \leq f_v(x),$$

azért egyszersmind

$$g_m(x) \rightarrow 0.$$



Vagyis tételünknek monoton sorozatra már igazolt speciális fogalmazása szerint

$$\int_a^b g_m(x) dx \rightarrow 0.$$

Az imént bebizonyított

$$\int_a^b g_m(x) dx > J_m - \sigma$$

egyenlőtlenség alapján ebből az következik, hogy  $J_m - \sigma$  az  $m$  index elég nagy értékeire kisebb lesz bármely megadott pozitív számnál; speciálisan tehát elég nagy  $m$ -re

$$J_m - \sigma < \sigma,$$

azaz

$$J_m < 2\sigma.$$

Vagyis, minthogy  $\sigma$ -t tetszésszerint választhattuk, míg a  $J_m$  számok értelmezésében a  $\sigma$  még nem szerepelt, azért elég nagy  $m$ -ekre a nem-negatív  $J_m$  számok tetszésszerint kicsinyek, vagy más szóval

$$J_m \rightarrow 0.$$

Ezzel az Osgood-féle tételt bebizonyítottuk.

Bizonyításunk lényeges módosítás nélkül érvényes többváltozós függvények esetében is.

*Riesz Frigyes.*

## A HATVÁNYSORRA VONATKOZÓ KÉT ÖSSZETARTÁSI KRITERIUM KAPCSOLATÁRÓL.

### Bevezetés.

FEJÉR bebizonyította,<sup>1</sup> hogy a  $z$  komplex változónak az egységkörben összetartó

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

hatványsora a lezárt egységkörlapon egyenletesen konvergens, ha ugyanitt  $f(z)$  folytonos és az egységkörnek  $f(z)$  által létrehozott konformis képe véges területű.

A terület szót úgy kell érteni, hogy az egyes területrészeket sokszorosságuk szerint többször is kell számítani.

A hatványsor egyenletes konvergenciájának eme „terület”-feltételével teljesen æquivalens az a feltétel, hogy a

$$|c_1|^2 + 2|c_2|^2 + 3|c_3|^2 + \dots$$

végtelen sor konvergens.

Másrészt a FOURIER-sorok klasszikus JORDAN-féle konvergencia tétele biztosítja a  $\sum_0^\infty c_n z^n$  sornak a lezárt egységkörlapon való egyenletes konvergenciáját akkor is, ha ugyanitt  $f(z)$  folytonos és az egység sugarú körön véges variációjú.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> L. FEJÉR: La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple, (Comptes-Rendus, t. 156, p. 46, séance du 6 janvier 1913.). — L. FEJÉR: Über die Konvergenz der Potenzreihe an der Konvergenzgrenze in Fällen der konformen Abbildung auf die schlichte Ebene, (Schwarz-Festschrift, Berlin, 1914.)

<sup>2</sup> Azt mondom, hogy a  $\rho$  sugarú körön értelmezett  $\varphi(z) = \varphi(\rho e^{i\vartheta})$  függvény e körön véges variációjú, ha van olyan  $K$  konstans, a melyre

$$|\varphi(\rho e^{i\vartheta_1}) - \varphi(\rho e^{i\vartheta_2})| + \dots + |\varphi(\rho e^{i\vartheta_n}) - \varphi(\rho e^{i\vartheta_1})| \leq K,$$

hacsak

$$0 \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \dots \leq \vartheta_n \leq \vartheta_1 + 2\pi. \quad n = 1, 2, \dots$$

Az ilyen összes lehető összegek felső határa a függvény variációja a  $\rho$  sugarú körön.



Az, hogy  $f(z)$  az egységsugarú körvonalon véges variációjú, geometriailag azt jelenti, hogy az egységsugarú körvonalnak  $f(z)$  által létesített képe rektifikálható görbét alkot.

Ennél az «ívhossz»-feltételnél a «terület»-feltétel sok esetben lényegesen általánosabb.

Ezt mutatja az a speciális eset, a mikor az  $f(z)$  által létesített leképezés egyszerű (schlicht).

Ekkor, — hacsak  $f(z)$  folytonos a lezárt körtáblán — a kép területe véges, kerületének hossza pedig általában nem létezik.

Ezeztől a megfontolásoktól vezettetve mondotta ki FEJÉR azt a sejtését, hogy az «ívhossz»-feltétel teljesülése esetén az ő «terület» feltétele mindig teljesítve van.

Ennek a sejtésnek a bizonyítását adom a következő sorokban.

Egyszersmind HARDY egyik tételét<sup>1</sup> is új, egyszerű módon fogom bebizonyítani.

Köszönetet kell mondanom e helyen FEJÉR professzor úrnak akitől e vizsgálat megejtésére az impulzust nyertem.

### 1. §. Az ívhossz kissé módosított definíciója.

A  $|z| = 1$  körvonalon értelmezett mindenütt folytonos (nem feltétlenül analitikai) komplex értékű  $f(z)$  függvény e kört egy  $C$  folytonos görbére képezi le.

Vagy más szóval, ha

$$f(z) = u(\vartheta) + i v(\vartheta), \quad z = e^{i\vartheta},$$

úgy az  $u$  és a  $v$  a  $\vartheta$ -nak mindenütt folytonos és  $2\pi$  szerint periodikus függvényei.

$$u = u(\vartheta) \quad v = v(\vartheta)$$

a  $C$  görbének «parameteres» egyenletei.

<sup>1</sup> HARDY: The Mean Value of the Modulus of an Analytic Function [Proc. of the London Math. Society, Ser. II. Bd. XIV (1915) S. 269—277.] HARDY cikkéről LANDAU ismertetéséből szereztem tudomást. Lásd LANDAU: Neuer Beweis eines Hardyschen Satzes. Archiv der Math. und Physik. Dritte Reihe Bd. 25. 2. Heft. S. 173—178.

Legyenek  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ , olyan valós számok, a melyekre

$$0 \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \vartheta_3 \leq \dots \leq \vartheta_n \leq \vartheta_1 + 2\pi,$$

akkor

$$f_1 = f(e^{i\vartheta_1}), \dots, f_n = f(e^{i\vartheta_n})$$

egy, a  $C$  görbébe írt  $n$  oldalú sokszög csúcspontjai.

E sokszög hossza

$$|f_1 - f_2| + |f_2 - f_3| + \dots + |f_n - f_1|.$$

A  $C$  görbébe írt leghosszabb  $P_n$   $n$  oldalú poligon hossza legyen  $K_n$ .

Világos, hogy

$$K_n \leq K_{n+1},$$

aminek következtében

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = K$$

limes létezik és vagy véges vagy  $+\infty$ .

Ha  $K$  véges, akkor azt mondjuk, hogy a  $C$  görbe rektifikálható és ívhossza  $K$ . Az ívhosszúság ez értelmezését FEJÉR egyetemi előadásaiából ismerem. E definíció a JORDAN-félével nyilván equivalens; alapul vétele a mi bizonyításainkat átlátszóbbá teszi.

## 2. §. A koncentrikus körvonalak konformis képeinek ívhossza.

Most visszatérek az egységkörben konvergens

$$f(z) = c_0 + c_1 z + \dots$$

hatványsorhoz.

Az  $f(z)$  analitikai függvény leképezi az egységkör belsejét egy általában végtelen sok sík lapból álló felületre és a  $|z| = \rho$  körvonalat ( $0 < \rho < 1$ ) egy (általában többszörös pontokból is álló)  $C_\rho$  analitikai görbére.

A  $C_\rho$  görbébe írható maximális hosszú,  $n$  oldalú,  $P_{n,\rho}$ -val jelölt sokszög hossza legyen  $K_n(\rho)$ .



Azt állítom, hogy

$$K_n(\varrho) \leq K_n(\varrho'), \quad \text{ha} \quad 0 < \varrho \leq \varrho' < 1.$$

*Bizonyítás.* Legyenek a  $P_{n, \varrho}$  poligon csúcspontjai rendre  $f(\varrho e^{i\vartheta_1}), f(\varrho e^{i\vartheta_2}), \dots, f(\varrho e^{i\vartheta_n}), \quad 0 \leq \vartheta_1 \leq \vartheta_2 \leq \dots \leq \vartheta_n \leq \vartheta_1 + 2\pi.$

$P_{n, \varrho}$  hossza (lásd 1. §.):

$$K_n(\varrho) = |f(\varrho e^{i\vartheta_1}) - f(\varrho e^{i\vartheta_2})| + \dots + |f(\varrho e^{i\vartheta_n}) - f(\varrho e^{i\vartheta_1})|.$$

Legyen

$$\begin{aligned} |f(\varrho e^{i\vartheta_1}) - f(\varrho e^{i\vartheta_2})| &= \eta_1 (f(\varrho e^{i\vartheta_1}) - f(\varrho e^{i\vartheta_2})), \dots, \\ |f(\varrho e^{i\vartheta_n}) - f(\varrho e^{i\vartheta_1})| &= \eta_n (f(\varrho e^{i\vartheta_n}) - f(\varrho e^{i\vartheta_1})), \end{aligned}$$

ahol  $\eta_1, \dots, \eta_n$  alkalmasan választott egység abszolút értékű komplex számok.

Most tekintem a  $z$  változónak következő, az egységkör belsőjében reguláris analitikai függvényét:

$$g(z) = \eta_1 (f(z e^{i\vartheta_1}) - f(z e^{i\vartheta_2})) + \dots + \eta_n (f(z e^{i\vartheta_n}) - f(z e^{i\vartheta_1})).$$

$|g(z)|$ -nek a lezárt  $\varrho$  sugarú körtáblán a maximuma  $g(\varrho)$ , azaz  $K_n(\varrho)$ .

De  $g(z)$  analitikai függvény modulusának maximumát egy tartományban mindig annak határán veszi fel, tehát ha  $\varrho' \geq \varrho$ , úgy a  $|z| = \varrho'$  körvonalon van oly  $z'$  szám, a melyre

$$|g(z')| \geq g(\varrho).$$

Az

$$f(z' e^{i\vartheta_1}), \dots, f(z' e^{i\vartheta_n})$$

pontok a  $C_{\varrho'}$  görbébe irt olyan  $n$ -oldalú poligon csúcsai, amelynek hossza

$$\begin{aligned} |f(z' e^{i\vartheta_1}) - f(z' e^{i\vartheta_2})| + \dots + |f(z' e^{i\vartheta_n}) - f(z' e^{i\vartheta_1})| &\geq \\ &\geq |g(z')| \geq g(\varrho) = K_n(\varrho). \end{aligned}$$

Vagyis a fortiori

$$K_n(\varrho') \geq K_n(\varrho).$$

A most bebizonyított tételt így mondom ki:

*I. Tétel.* Ha  $f(z)$  az egységkör belsejében reguláris analitikai függvény,  $C_\varrho$  a  $|z| = \varrho$  körvonalnak  $f(z)$  által létesített képe és  $K_n(\varrho)$  a  $C_\varrho$  görbébe írható maximális hosszúságú  $n$  oldalú sokszög hossza, úgy<sup>1</sup>

$$K_n(\varrho) \leq K_n(\varrho'), \quad \text{ha } 0 < \varrho \leq \varrho' < 1. \quad (1)$$

A  $C_\varrho$ , illetve  $C_{\varrho'}$  görbék ívhosszai (lásd 1. §.):

$$K(\varrho) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(\varrho),$$

$$K(\varrho') = \lim_{n \rightarrow \infty} K_n(\varrho').$$

Tehát az (1) formulára való tekintettel

$$K(\varrho) \leq K(\varrho'), \quad \varrho \leq \varrho',$$

Vagyis fennáll a következő

*II. tétel. (HARDY tétele)*  $C_\varrho$  görbe ívhossza,  $K(\varrho)$  a  $\varrho$ -val monoton nő.

A II. tételt kimondom most geometriai alakjától megfosztva és kissé kiegészítve:

*II\* tétel.* Ha  $f(z)$  az egységkörben reguláris, a lezárt egységlapra folytonos és az egységkörön véges variációjú, akkor, ha  $K(\varrho)$  jelenti  $f(z)$ -nek a  $\varrho$  sugarú körön vett variációját:

$$K(\varrho) \leq K(\varrho'), \quad \text{ha } 0 < \varrho \leq \varrho' \leq 1$$

és

$$\lim_{\varrho \rightarrow 1} K(\varrho) = K(1).$$

Végül áll a

*II\*\* tétel.* A II\* tétel állításai igazak maradnak, ha  $f(z)$  helyébe ennek reális részét,  $u(\varrho, \vartheta)$ -t és  $K(\varrho)$  helyébe  $u$  variációját írjuk.

<sup>1</sup> Az I. tétel  $n = 2$  esetében átmegy LANDAU és TOEPLITZ egy tételébe: Über die grösste Schwankung einer analytischen Funktion in einem Kreise. Archiv der Math. und Phys. III. Reihe. Bd. 11. S. 307. Ez esetben bizonyításom is átmegy LANDAU és TOEPLITZ bizonyításába.



### 3. §. A «terület»-feltétel általánosabb, mint az «ívhossz»-feltétel.

Most bebizonyítom a bevezetésben említett tételt.

III. tétel. Ha az egységgör belsejében reguláris, a lezárt körlápon folytonos

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

függvény az egységgörön véges variációjú, úgy az  $f(z)$  által létesített leképezés az egységgör belsejét véges területű felületre képezi le.

Ez másképen annyit is jelent, hogy ekkor a

$$|c_1|^2 + 2|c_2|^2 + 3|c_3|^2 + \dots$$

végtelen sor convergens.

Legyen  $T(\varrho)$  az  $|z| \leq \varrho$  körtábla ( $0 < \varrho < 1$ ) képeinek területe:

$$T(\varrho) = \iint_{x^2+y^2 \leq \varrho^2} |f'(z)|^2 dx dy = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 \varrho^{2n}.$$

Másrészt, ha

$$f(z) = u(r, \vartheta) + iv(r, \vartheta), \quad z = re^{i\vartheta},$$

a PARSEVAL-formula alkalmazásával nyerjük, hogy

$$T(\varrho) = \int_0^{2\pi} u(\varrho, \vartheta) \frac{\partial v(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta} d\vartheta \leq |u|_{\max} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial v(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right| d\vartheta, \quad (2)$$

ahol  $|u|_{\max}$  jelenti az  $u(r, \vartheta)$  maximumát az egységgörörlápon.

Mivel  $f(z)$  az egységsugarú körvonalon véges variációjú, tehát (a II\* tétel alkalmazásával)

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial v(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta} \right| d\vartheta \leq \int_0^{2\pi} |f'(\varrho e^{i\vartheta})| d\vartheta \leq K(1),$$

és így, a (2) alapján,  $T(\varrho)$  kisebb egy a  $\varrho$ -tól független konstansnál. Vagyis  $\lim_{\varrho \rightarrow 1} T(\varrho)$  véges. És ezt kellett bebizonyítanunk.

A bizonyításból és a II\*\* tételből kitűnik, hogy igaz a  
 IV. tétel. Ha  $u(\vartheta)$  a  $\vartheta$  reális változó  $2\pi$  szerint periodikus,  
 reális, véges variációjú függvénye, melynek FOURIER-féle sora

$$u(\vartheta) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \vartheta + b_1 \sin \vartheta + \dots,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\vartheta) \cos n\vartheta d\vartheta, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\vartheta) \sin n\vartheta d\vartheta$$

és az  $u(\vartheta)$  konjugált függvénye:

$$v(\vartheta) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\vartheta - b_n \cos n\vartheta)$$

korlátos, úgy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} n (a_n^2 + b_n^2)$$

végtelen sor *convergens*.<sup>1</sup>

Csillag Pál.

---

<sup>1</sup> Hogy a  $v(\vartheta)$  korlátossága nélkül a tétel érvénytelenné válhatik, következik FEKETE példájából: a  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\vartheta}{n \sqrt{\log n}}$  Fourier sor véges variációjú függvényt állít elő. Ugyancsak FEKETE a IV. tételnek egy más bizonyítását is adta és pedig RIESZ FRIGYESnek a lineáris funkcionáloperációkról szóló egyik tétele alapján.



## A PRIMITIV $n$ -EDIK EGYSÉGGYÖKÖK $\varphi(n)$ -ED-FOKÚ EGYENLETÉRŐL.

Ismeretes, hogy a primitiv  $n$ -edik egységgyököket az

$$X_n(x) \equiv \prod_{n:d} (x^{\frac{n}{d}} - 1)^{E_d} = 0 \quad (I)$$

egyenlet szolgáltatja, a melyben a baloldalon a szorzat a  $d$ -re vonatkozik és  $n$  összes osztóira kiterjesztendő.  $E_d$  az ismert MÖBIUS-féle symbolum, mely 1-et jelent, ha  $d=1$ , zérust, ha  $d$  egész szám négyzetével osztható, végül  $+1$ , vagy  $-1$  értéket jelent, ha  $d$  páros, vagy páratlan számú különböző törzsszám szorzata. Az (I) részletesen ekként írható:

$$X_n(x) = \frac{(x^n - 1) \prod_{\frac{n}{p_1 p_2}} (x^{\frac{n}{p_1 p_2}} - 1) \prod_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}} (x^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3 p_4}} - 1) \dots}{\prod_{\frac{n}{p_1}} (x^{\frac{n}{p_1}} - 1) \prod_{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}} (x^{\frac{n}{p_1 p_2 p_3}} - 1) \dots}$$

Az  $X_n(x)$  tudvalevően  $\varphi(n)$ -ed fokú raczionális egész függvény, tehát az előbb felírt tört olyan, hogy a számlálóban álló raczionális egész függvény a nevezőben állóval osztható.

E ténynyel szemben felmerül a kérdés: nem lehet-e az  $X_n(x)$  többtagút közvetlenül, mint  $\varphi(n)$  ed-fokú raczionális egész függvényt előállítani? Erre a kérdésre óhajtok a jelen dolgozatban megfelelni és e mellett egy, a DIRICHLET-DEDEKIND: «Vorlesungen über Zahlentheorie» című munkában (IV. kiadás, VII. supplementum; 369. lap) közölt, de eddig még be nem bizonyított és a primitiv  $n$ -edik egységgyökök hatványösszegeire vonatkozó tétel helyességét kimutatni.

## I.

Az  $X_n(x)$  többtagú explicit előállítás.

Módot keresünk arra, hogy az

$$X_n(x) \equiv a_0 x^{\varphi(n)} + a_1 x^{\varphi(n)-1} + \dots + a_i x^{\varphi(n)-i} + \dots + \\ + a_{\varphi(n)-1} x + a_{\varphi(n)} = 0$$

egyenlet többtagújának

$$a_0, a_1, \dots, a_i, \dots, a_{\varphi(n)-1}, a_{\varphi(n)}$$

együtthatóit kifejezhezzük. Ezen együtthatók kiszámítására alkalmas módot szolgáltatnak az ismeretes NEWTON-identitások, melyek az egyenlet együtthatói és gyökeiből alkotott hatványösszegek közti összefüggést fejezik ki. Jelöljük  $s_k$ -val a  $k$ -adik hatványösszeget:

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \dots + x_{\varphi(n)}^k, \quad (k=1, 2, \dots, \varphi(n))$$

ahol

$$x_1, x_2, \dots, x_{\varphi(n)}$$

az  $X_n(x) = 0$  egyenlet gyökei. Tekintsük az

$$\begin{aligned} s_1 a_0 + a_1 &= 0 \\ s_2 a_0 + s_1 a_1 + 2a_2 &= 0 \\ s_3 a_0 + s_2 a_1 + s_1 a_2 + 3a_3 &= 0 \\ \dots &\dots \\ s_i a_0 + s_{i-1} a_1 + s_{i-2} a_2 + \dots + i a_i &= 0 \\ \dots &\dots \\ s_{\varphi(n)} a_0 + s_{\varphi(n)-1} a_1 + s_{\varphi(n)-2} a_2 + \dots + \varphi(n) a_{\varphi(n)} &= 0 \end{aligned}$$

NEWTON-identitásokból és

$$a_0 x^{\varphi(n)} + a_1 x^{\varphi(n)-1} + a_2 x^{\varphi(n)-2} + \dots + a_{\varphi(n)} = 0$$

egyenletből, összesen  $\varphi(n)+1$  egyenletből álló, az  $a$ -kban lineáris homogen egyenletrendszert, a hol  $x$  a primitív  $n$ -edik egységgyökök valamelyike. Ennek az egyenletrendszernek a determinánsa zérustól különböző nem lehet, mert  $X_n(x)$  valódi  $\varphi(n)$ -ed fokú kifejezés, azaz

$$a_0 \neq 0;$$



tehát, akármelyik primitív  $n$ -edik egységgyököt jelentse is  $x$ , fennáll ez az egyenlőség:

$$\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots & i & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{\varphi(n)} & s_{\varphi(n)-1} & s_{\varphi(n)-2} & \dots & \varphi(n) & \dots & \dots & \dots \\ x^{\varphi(n)} & x^{\varphi(n)-1} & x^{\varphi(n)-2} & \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

E determinánst a  $\varphi(n) + 1$ -edik sora szerint kifejtve, egy konstans faktortól eltekintve, megkapjuk az  $X_n(x) = 0$  egyenlet többtagúját.

$$\varphi(n)! X_n(x) = \varphi(n)! x^{\varphi(n)} + (-1)^1 \varphi(n)! \frac{A_1}{1!} x^{\varphi(n)-1} + \dots +$$

$$+ (-1)^i \varphi(n)! \frac{A_i}{i!} x^{\varphi(n)-i} + \dots + (-1)^{\varphi(n)} A_{\varphi(n)} = 0,$$

ahol

$$A_i = \begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{i-1} & s_{i-2} & s_{i-3} & \dots & i-1 & \dots & \dots \\ s_i & s_{i-1} & s_{i-2} & \dots & s_1 & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (i=1, 2, \dots, \varphi(n))$$

Az egyenletet  $\varphi(n)!$ -sal végigosztva, nyerjük:

$$X_n(x) = x^{\varphi(n)} + (-1)^1 \frac{A_1}{1!} x^{\varphi(n)-1} + \dots + (-1)^i \frac{A_i}{i!} x^{\varphi(n)-i} + \dots +$$

$$+ (-1)^{\varphi(n)-1} \frac{A_{\varphi(n)-1}}{(\varphi(n)-1)!} + (-1)^{\varphi(n)} \frac{A_{\varphi(n)}}{\varphi(n)!} = 0.$$

Hogy az együtthatókat konkrét esetekben kiszámíthassuk, szükségünk van az  $n$ -edik primitív egységgyökök hatványösszegeinek az ismeretére.

## II.

**Az  $n$ -edik primitiv egységgyökök hatványösszegeire vonatkozó tétel.**

Az  $n$ -edik primitiv egységgyökök hatványösszegeire vonatkozik a DIRICHLET-DEDEKIND: Vorlesungen über Zahlentheorie című műnek fentebb idézett helyén a következő szöveg alatti megjegyzés:

«Ist  $m = m'P$  eine beliebige positive ganze Zahl,  $P$  das Produkt aus allen, von einander verschiedenen, in  $m$  aufgehenden Primzahlen, und  $S_k$  die Summe der  $k$ -ten Potenzen der primitiven Wurzeln der Gleichung

$$x^m - 1 = 0,$$

so ist  $S_k = 0$ , so oft  $k$  nicht durch  $m'$  teilbar ist; ist aber  $k = m'K$ , ferner  $Q$  der grösste gemeinschaftliche Divisor von  $K$ , und  $P = QR$ , und  $r$  die Anzahl der in  $R$  aufgehenden Primzahlen, so ist

$$S_k = (-1)^r m' \varphi(Q).$$

E tétel bebizonyítása még eddig sehol sincs közölve,<sup>1</sup> ezért igyekszem a tétel helyességét a következőkben kimutatni. (Az én bizonyításomban  $m$  és  $m'$  szerepét  $n$  és  $n'$  játsza).

Ha

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s},$$

akkor az  $n$ -edik primitiv egységgyökök hatványösszegeit a  $p_1^{\alpha_1}$ -,  $p_2^{\alpha_2}$ -, etc.,  $p_s^{\alpha_s}$ -edik primitiv gyökök hatványösszegeiből számíthatjuk ki; ezért először az

$$x^{p^a} - 1 = 0 \quad (p \text{ primszám}) \quad (\text{I})$$

egyenlet primitiv gyökeiből alkotott hatványösszegekkel fog-

<sup>1</sup> E körülményre RADOS GUSZTÁV műegyetemi tanár úr volt szíves figyelmet felhívni.



lalkozunk. Ha  $e^{\frac{2i\pi}{p^\alpha}}$ -t  $r$ -el jelöljük, akkor az I. egyenlet összes gyökei

$$r, r^2, r^3, \dots, r^{p^\alpha};$$

ezek közül a primitiv gyökök azok, melyeknek kitevője  $p$ -vel nem osztható; tehát a következők:

$$r, r^2, r^3 \dots r^{p-1}, r^{p+1}, \dots, r^{(l-1)p+1}, \dots, r^{lp-1}, \dots, r^{p^\alpha-1}$$

és ezek  $k$  adik hatványösszege

$$s_k = r^k + r^{2k} + \dots + r^{(p-1)k} + r^{(p+1)k} + \dots + r^{[(l-1)p+1]k} + \dots + r^{lp-1}k + \dots + r^{p^\alpha-1}k.$$

Legyen

$$r^{[(l-1)p+1]k} + r^{[(l-1)p+2]k} + \dots + r^{lp-1}k = \sigma_l, \quad (l=1, 2, \dots, p^{\alpha-1})$$

akkor

$$s_k = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_l + \dots + \sigma_{p^{\alpha-1}},$$

ahol az első tag

$$\sigma_1 = r^k + r^{2k} + \dots + r^{(p-1)k} = r^k \frac{r^{k(p-1)} - 1}{r^k - 1}. \quad (II)$$

A többi tagból  $\sigma_l$  kiemelhető, ugyanis

$$\sigma_l = r^{(l-1)p} r^k \sigma_1, \quad (l=1, 2, \dots, p^{\alpha-1})$$

tehát

$$s_k = \sigma_1 [1 + r^{kp} + r^{2kp} + \dots + r^{(l-1)kp} + \dots + r^{(p^{\alpha-1}-1)p}]. \quad (III)$$

$\sigma_1$  értékét a (II) alapján helyettesítve és a zárójelben álló kifejezést összegezve, nyerjük:

$$s_k = r^k \frac{(r^{k(p-1)} - 1)(r^{kp^\alpha} - 1)}{(r^k - 1)(r^{kp} - 1)}. \quad (IV)$$

Három eset lehetséges.

a)  $k$  nem osztható  $p^{\alpha-1}$ -gyel. Ebben az esetben a IV. egyenlőség jobboldalán a törtkifejezés számlálója zérus, a nevező zérustól különböző. Tehát

$$s_k = 0. \quad (a)$$

b)  $k$  osztható  $p^{\alpha-1}$ -gyel, nem osztható  $p^\alpha$ -val. A (II) egyenlőséget vizsgáljuk:

$$\sigma_1 = r^k \frac{r^{k(p-1)} - 1}{r^k - 1} = \frac{r^{kp} - r^k}{r^k - 1};$$

de, ha  $k$  osztható  $p^{\alpha-1}$ -el, akkor

$$r^{kp} = 1,$$

tehát

$$\sigma_1 = \frac{1 - r^k}{r^k - 1} = -1;$$

továbbá, mivel a (III) egyenlőség jobboldalán  $\sigma_1$  szorzójában ez esetben minden tag  $+1$ -gyel egyenlő és e tagok száma  $p^{\alpha-1}$ ,

$$s_k = -p^{\alpha-1}. \quad (b)$$

c)  $k$  osztható  $p^{\alpha}$ -val. Ez esetben minden  $p^{\alpha}$ -dik egységgyök  $k$ -adik hatványa  $+1$ -gyel egyenlő és mivel  $s_k$   $\varphi(p^{\alpha})$  számú egységgyök  $k$ -adik hatványának összege,

$$s_k = \varphi(p^{\alpha}). \quad (c)$$

Az a), b) és c) alattiak felhasználásával az általános eset a következőképp tárgyalható: Ha  $n$  összetett szám törzstényezőkre bontva:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_h^{\alpha_h} \dots p_s^{\alpha_s},$$

akkor azon ismeretes tétel alapján, hogy az  $n$ -edik primitiv egységgyököket a  $p_1^{\alpha_1}$ -,  $p_2^{\alpha_2}$ -, etc.,  $p_s^{\alpha_s}$ -edik primitiv egységgyökök szorzatai adják, következik, hogy

$$s_k^{(n)} = s_k^{(p_1^{\alpha_1})} \cdot s_k^{(p_2^{\alpha_2})} \dots s_k^{(p_h^{\alpha_h})} \dots s_k^{(p_s^{\alpha_s})},$$

(a hol a felső indexek jelölik, hogy melyik fokszámú egyenlet primitiv gyökeinek hatványösszegéről van szó).

Jelöljük az  $n$ -ben foglalt összes különböző törzstényezők szorzatát  $P$ -vel és legyen

$$n = n'P,$$

ahol

$$n' = p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2-1} \dots p_h^{\alpha_h-1} \dots p_s^{\alpha_s-1}$$

és

$$P = p_1 \cdot p_2 \dots p_h \dots p_s.$$

Az  $s_k^{(n)}$ -re vonatkozólag 2 esetet kell megkülönböztetni:



$\alpha)$   $k$  nem osztható  $n'$ -vel; akkor van az  $n'$ -nek legalább egy törzstényezője, melynek  $n'$ -ben előforduló hatványával  $k$  nem osztható. Legyen ez a törzstényező  $p_h$ . Ha  $k$  nem osztható  $p_h^{a_h-1}$ -el, akkor  $(\alpha)$ -ból következik, hogy

$$s_k^{(p_h^{a_h})} = 0,$$

tehát

$$s_k^{(n)} = s_k^{(p_1^{a_1})} \cdot s_k^{(p_2^{a_2})} \dots s_k^{(p_h^{a_h})} \dots s_k^{(p_s^{a_s})} = 0.$$

$\beta)$   $k$  osztható  $n'$ -el.

$$n' = p_1^{a_1-1} \cdot p_2^{a_2-1} \dots p_r^{a_r-1} \cdot p_{r+1}^{a_{r+1}-1} \dots p_s^{a_s-1}$$

és legyen

$$\frac{k}{n'} = K$$

még osztható a

$$p_{r+1}, p_{r+2}, \dots, p_s$$

törzsszámokkal; akkor  $P$  és  $K$ -nak van közös osztója, legyen

$$(P, K) = Q \quad \text{és} \quad P = Q \cdot R,$$

ahol

$$R = p_1 p_2 \dots p_r$$

és

$$Q = p_{r+1} \cdot p_{r+2} \dots p_s$$

$$s_k^{(n)} = S_1 S_2,$$

(1)

ahol

$$S_1 = s_k^{(p_1^{a_1})} \cdot s_k^{(p_2^{a_2})} \dots s_k^{(p_r^{a_r})}$$

és

$$S_2 = s_k^{(p_{r+1}^{a_{r+1}})} \cdot s_k^{(p_{r+2}^{a_{r+2}})} \dots s_k^{(p_s^{a_s})}.$$

Az

$$S_1 = s_k^{(p_1^{a_1})} \cdot s_k^{(p_2^{a_2})} \dots s_k^{(p_l^{a_l})} \dots s_k^{(p_r^{a_r})}$$

szorzat egy tetszőleges tényezője a b) alatti tárgyalások alapján

$$s_k^{(p_l^{a_l})} = -p_l^{a_l-1};$$

az  $S_1$  tényezőinek száma ugyanannyi, mint az  $R$  törzstényezőinek száma (a mit  $r$ -el jelölünk); tehát

$$S_1 = (-1)^r p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2-1} \dots p_l^{\alpha_l-1} \dots p_r^{\alpha_r-1}. \quad (2)$$

Továbbá az

$$S_2 = s_k^{(p_{r+1}^{\alpha_{r+1}})} \cdot s_k^{(p_{r+2}^{\alpha_{r+2}})} \dots s_k^{(p_q^{\alpha_q})} \dots s_k^{(p_s^{\alpha_s})}$$

szorzat egy tetszőleges tényezője a (c) alatti egyenlőség szerint:

$$s_k^{(p_q^{\alpha_q})} = \varphi(p_q^{\alpha_q}),$$

tehát

$$\begin{aligned} S_2 &= \varphi(p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}) \cdot \varphi(p_{r+2}^{\alpha_{r+2}}) \dots \varphi(p_q^{\alpha_q}) \dots \varphi(p_s^{\alpha_s}) = \\ &= p_{r+1}^{\alpha_{r+1}-1} \cdot p_{r+2}^{\alpha_{r+2}-1} \dots p_q^{\alpha_q-1} \dots p_s^{\alpha_s-1} (p_{r+1}-1) (p_{r+2}-1) \dots (p_s-1). \end{aligned}$$

De mivel

$$(p_{r+1}-1) (p_{r+2}-1) \dots (p_s-1) = \varphi(Q),$$

tehát

$$S_2 = p_{r+1}^{\alpha_{r+1}-1} \cdot p_{r+2}^{\alpha_{r+2}-1} \dots p_s^{\alpha_s-1} \cdot \varphi(Q), \quad (3)$$

e szerint (1), (2) és (3) alapján

$$s_k^{(n)} = (-1)^r n' \varphi(Q),$$

a mivel DEDEKIND tétele igazolva van.

★

Figyelemreméltó az  $s_k^{(n)}$  értéke két szélső esetben:

1. ha  $(P, K) = 1$ , akkor  $s_k^{(n)} = (-1)^{sn'}$  (s a  $P$  törzstényezőinek száma)
2. ha  $(P, K) = P$ , akkor  $s_k^{(n)} = \varphi(n)$ .

Szilárd Stefánia.



## VALÓS EGYÜTTTHATÓS EGYENLETEK VALÓS GYÖKEIRŐL.

(Harmadik, befejező közlemény.)

### 6. §. A kimondott tételek bizonyítása.

*I. tétel.* Feltétel szerint  $f(x)$  konvergenciasugara nagyobb a  $(\varphi)$  sorozat tagjainak közös konvergenciasugaránál,  $R$ -nél.  $R$  tehát szükségképen véges szám és mivel  $f(x)$  konvergenciasugaránál kisebb, az  $f(x) = 0$  egyenletnek csak véges számú,  $R$ -nél kisebb pozitív gyöke lehet. Legyenek ezek nagyság szerint rendezve  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$  és multiplicitásuk legyen rendre  $m_1, m_2, \dots, m_p$ , a hol  $m_1 + m_2 + \dots + m_p = M$  az egyenlet  $R$ -nél kisebb pozitív gyökeinek száma. A levezetett egyenlőtlenségek felhasználásával a kimondott tételt úgy bizonyítom be, hogy mindegyik gyököt egy  $4\delta$  szélességű környezettel véve körül, kimutatom, hogy  $k$ -t elég nagyra választva az  $(A)$  sorozatnak valamelyik gyök környezetéhez tartozó részsorozata pontosan annyi jelváltást tartalmaz, mint a gyök multiplicitása, több jelváltás pedig a sorozatban nem lép föl. Ezen környezetek kijelölése előtt diszponálok  $\tau$  és  $G$  fölött. Tegyen  $\varrho$  a következő egyenlőtlenségnek eleget:

$$\frac{|a_0|}{|a_1|\varrho + |a_2|\varrho^2 + \dots} \geq 1.$$

A változónak minden  $\varrho$ -nál kisebb pozitív értékére nézve

$$|f(x)| \geq |a_0| - \{|a_1|x + |a_2|x^2 + \dots\} > |a_0| - \{|a_1|\varrho + |a_2|\varrho^2 + \dots\} > 0,$$

tehát az  $f(x) = 0$  egyenletnek nincs  $\varrho$ -nál kisebb pozitív gyöke. Legyen  $\tau = \varrho$ , ha  $\varrho$  kisebb  $f(x) = 0$  legkisebb pozitív gyökénél  $\xi_1$ -nél, és legyen  $\tau < \varrho$ , ha  $\varrho = \xi_1$  volna. Legyen továbbá  $G = R$ .

Akkor  $\delta$ -t úgy határozom meg, hogy

- a)  $\delta < \tau < \xi_1 - \delta$ ;
- b)  $\xi_i + 2\delta < \xi_{i+1} - 2\delta$ ,  $i = 1, 2, \dots, p-1$ ;
- c)  $\xi_p + 2\delta < R$ .

Ezek után a  $(0, R)$  intervallumot a következő, részint egymásba átnyúló részintervallumokra osztom fel:

$$(0, \tau), (\tau, \xi_1 - \delta), (\xi_1 - 2\delta, \xi_1 + 2\delta), (\xi_1 + \delta, \xi_2 - \delta), \dots, \\ (\xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta), (\xi_i + \delta, \xi_{i+1} - \delta), \dots, (\xi_p - 2\delta, \xi_p + 2\delta), (\xi_p + \delta, R)$$

A gyököket körülvevő intervallumokat elsőfajúaknak, a többi másodfajúnak nevezem.

Jelentse  $f_0$  az  $|f(x)|$  alsó határát az összes másodfajú részintervallumban,  $f_i$  pedig az  $\frac{1}{m_i!} |f^{(m_i)}(x)|$  alsó határát a  $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta)$  intervallumban; legyen  $f$  a legkisebb az  $f_0, f_1, \dots, f_p$  számok között. Legyen másrésről  $F$  a legnagyobb az  $F_0, F_1, \dots, F_{M+1}$  számok közt, a hol  $F_i$  jelenti az  $F^{(i)}(x)$  felső határát a  $(0, G)$  intervallumban.

Válasszunk  $K$ -t úgy, hogy  $k \geq K$ -ra nézve

- a)  $\varphi_k$  hatványsora legalább  $(M+1)$ -szeresen pozitív legyen;
- $\beta$ ) a  $(0, R)$  intervallum minden  $\delta$  kiterjedésű részéhez az  $(A)$  sorozatnak legalább egy és minden  $4\delta$  kiterjedésű részéhez legalább  $M+1$  tagja tartozzék;
- $\gamma$ ) legyen a pozitív  $\varepsilon$  úgy választva, hogy  $2\varepsilon(F+1) < f$  legyen és teljesüljenek az így megválasztott  $\varepsilon$ -ra nézve az előbbi fejezetben levezetett  $(f_0^*)$  és  $(f_p^*)$  egyenlőtlenségek, ha  $k \geq K$ ,  $p \leq M$  és  $\frac{c_{n-1}}{c_n}$  a  $(\tau, R)$  intervallum pontja.

Ezek után a bizonyítás 3 lépésben történik; kimutatom, hogy, ha  $k$  nem kisebb az így megválasztott  $K$ -nál, akkor

1. a másodfajú intervallumokhoz tartozó részsorozatok nem tartalmaznak jelváltozást;

2. egy elsőfajú részintervallumhoz tartozó részsorozat ugyanolyan előjelű taggal végződik, mint a minővel a következő másodfajú kezdődik, ez ismét olyan előjelű taggal végződik, a minővel a következő elsőfajú kezdődik és így tovább; az  $(A)$



sorozatban fellépő összes jelváltások tehát azok, a melyek az elsőfajú részintervallumokhoz tartozó részsorozatokban lépnek föl;

3. az  $(A)$  sorozat egy oly részsorozata, a mely egy elsőfajú részintervallumhoz tartozik, pontosan annyi jelváltást tartalmaz, mint az intervallumban lévő gyök multiplicitása, tehát

$$v(k) = m_1 + m_2 + \dots + m_p = M.$$

1. A másodfajú intervallumok közül a  $(0, \tau)$ -hoz tartozó részsorozatban (a mely a  $K$ -ra vonatkozó  $\beta$ ) feltétel szerint okvetlenül tartalmaz tagokat) nincs jelváltás; ha ugyanis  $0 \leq \frac{c_{n-1}}{c_n} \leq \tau$ , akkor

$$\begin{aligned} |a_0 - A_n| &= \left| \frac{c_{n-1}}{c_n} a_1 + \dots + \frac{c_0}{c_n} a_n \right| \leq \frac{c_{n-1}}{c_n} |a_1| + \dots + \frac{c_0}{c_n} |a_n| < \\ &< |a_1| \frac{c_{n-1}}{c_n} + |a_2| \left( \frac{c_{n-1}}{c_n} \right)^2 + \dots + |a_n| \left( \frac{c_{n-1}}{c_n} \right)^n < \\ &< |a_1| \tau + |a_2| \tau^2 + \dots + |a_n| \tau^n \leq |a_0|, \end{aligned}$$

tehát  $A_n$  előjele megegyezik  $f(0) = a_0$  előjelével. Ha pedig  $A_n$  a többi másodfajú intervallum valamelyikéhez tartozik, akkor a  $\gamma$ ) feltétel szerint teljesülő  $(f_0^*)$  egyenlőtlenségből:

$$\left| f\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n \right| < \varepsilon (F_1 + 1) < 2\varepsilon (F + 1) < f \leq f\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)$$

következik, hogy az  $(A)$  sorozatnak ezen másodfajú intervallumhoz tartozó tagjai előjelre megegyeznek  $f(x)$ -nek ezen intervallumhoz tartozó értékeivel. Másodfajú intervallumhoz tartozó részsorozat tehát nem tartalmazhat jelváltást.

2. Bármelyik két szomszédos első- és másodfajú intervallumnak van egy  $\delta$  szélességű közös része, a melyhez a  $\beta$ ) feltétel szerint  $(A)$ -nak legalább egy tagja tartozik. A  $(\tau, \xi_1 - \delta)$ -hoz tartozó részsorozat utolsó tagja tehát egyszersmind tagja a  $(\xi_1 - 2\delta, \xi_1 + 2\delta)$ -hoz tartozó részsorozatnak is, ennek utolsó tagja már a  $(\xi_1 + \delta, \xi_2 - \delta)$ -hoz is tartozik és így tovább; mivel tehát 2 szomszédos különfajta részsorozatnak mindig van legalább egy közös tagja, két ily részsorozat között jelváltás nem léphet föl.

3. Az eddigiek szerint az  $(A)$  sorozat két szomszédos tagja között csak akkor léphet föl jelváltás, ha azok ugyanazon első-fajú részintervallumhoz tartoznak. Legyen a  $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta)$ -hoz tartozó részsorozat:

$$A_n, \quad A_{n+1}, \dots, \quad A_{n+v}$$

és fordítsuk figyelmünket az

$$A'_n, \quad A'_{n+1}, \dots, \quad A'_{n+v-1};$$

$$A''_n, \quad A''_{n+1}, \dots, \quad A''_{n+v-2};$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$A_n^{(m_i)}, \quad A_{n+1}^{(m_i)}, \dots, \quad A_{n+v-m_i}^{(m_i)}$$

sorozatokra, a melyek közül az utolsó is okvetlenül tartalmaz tagokat, mert a  $\beta$ ) feltétel szerint a  $4\delta$  kiterjedésű  $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta)$  intervallumhoz az  $(A)$  sorozatból legalább  $M + 1$  tag tartozik ( $M \geq m_i$ ). A felírt sorozatok minden tagja a  $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta)$  intervallum pontjaihoz tartozik és az utolsóinak minden tagja egyenlő előjelű; ugyanis a  $\gamma$ ) feltétel szerint teljesül az  $(f_p^*)$  egyenlőtlenség  $p = m_i \leq M$ -re nézve:

$$\left| \frac{1}{m_i!} f^{(m_i)} \left( \frac{c_{n-1}}{c_n} \right) - A_n^{(m_i)} \right| < \frac{\varepsilon}{m_i!} (F_{m_i} + F_{m_i+1}) + 2\varepsilon < \\ < 2\varepsilon (F + 1) < f \leq f_i \leq \frac{1}{m_i!} f^{(m_i)} \left( \frac{c_{n-1}}{c_n} \right),$$

tehát az utolsó sor tagjai előjelre nézve megegyeznek  $f^{(m_i)}(x)$  előjelevel a  $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + \delta)$  intervallumban, vagyis mind egyenlő előjelűek.

De akkor FEKETE egy lemmájából következik, hogy az  $A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+v}$  sorozat legfeljebb  $m_i$  jelváltást tartalmazhat. Ugyanis a felírt sorozatok mindegyike az előbbiből úgy keletkezik, mint az  $a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots$  sorozat az  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  sorozatból, ha bizonyos faktorokat, a melyek  $\alpha$ ) szerint pozitívok, elhanyagolunk (a mi a jelváltásokat nem befolyásolja). Fennáll pedig a következő lemma:<sup>1</sup>

<sup>1</sup> FEKETE: Rendiconti I. c.



Ha az

$$\alpha_1 - \alpha_0, \alpha_2 - \alpha_1, \alpha_3 - \alpha_2, \dots \quad (d)$$

reális számsorozatban a jelváltások száma  $w$ , akkor az

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots \quad (a)$$

sorozatban nem lehet nagyobb, mint  $w+1$ .

Ha ugyanis a  $(d)$  sorozatban nincs jelváltás, akkor az  $(a)$  sorozat monoton növekvő vagy monoton fogyó, tehát legfeljebb 1 jelváltást tartalmazhat. A lemma tehát helyes lévén  $w=0$  esetében, teljes indukciót alkalmazok. Ha a  $(d)$  sorozat  $w+1$  jelváltást tartalmaz és az első az  $\alpha_m - \alpha_{m-1}$  tag után lép föl, akkor az

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m, \alpha_{m+2} - \alpha_{m+1}, \dots$$

sorozatban csak  $w$  jelváltás lévén, az

$$\alpha_m, \alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots$$

sorozatban a jelváltások száma legfeljebb  $w+1$ , mert a lemmát  $w$  jelváltás esetében helyesnek tételezem fel. Az

$$\alpha_1 - \alpha_0, \dots, \alpha_m - \alpha_{m-1}$$

sorozatban azonban nincs jelváltás, tehát az

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$$

sorozat legfeljebb 1 jelváltást mutat fel, és az  $(a)$  sorozat legfeljebb  $(w+2)$ -t, qu. e. d.

Ezen lemmának ismételt alkalmazásával nyerjük, hogy a felírt sorozatok közül az  $m_i$ -ediket megelőző sorozatban legfeljebb 1, az azt megelőzőben legfeljebb 2, és így tovább, végül az

$$A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+r}$$

sorozatban legfeljebb  $m_i$  jelváltás lehet.

LAGUERRENÉK a bevezetésben V. alatt idézett tétele azonban azt mondja, hogy az  $(A)$  sorozatban fellépő jelváltások száma nem lehet kisebb, mint az  $R$ -nél kisebb pozitív gyökök száma,  $M$ . Az összes jelváltások pedig, a mint láttuk, az elsőfajú intervallumokhoz tartozó részsorozatokban lépnek föl; ha tehát az egyikben, pl. a  $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta)$ -hoz tartozóban a jelváltások

száma  $m_i$ -nél kevesebb volna, akkor egy másikban kellene meghaladnia a megfelelő részintervallumban lévő gyök multiplicitását, a mi lehetetlen. Tehát mindegyik elsőfajú intervallumhoz tartozó részsorozat pontosan annyi jelváltást tartalmaz, mint az illető intervallumban lévő gyök multiplicitása.

*II. tétel.* Bebizonyítottam az eddigiekben, hogy ha az  $f(x)$  reális együtthatójú hatványsor konvergenciasugara nagyobb  $R$ -nél,  $f(0) \neq 0$  és  $f(R) \neq 0$ , akkor megadható a  $K$  pozitív egész szám úgy, hogy  $k \geq K$ -ra nézve a  $\varphi_k(x)f(x)$  hatványsorában a jelváltások száma  $v(k)$  az  $f(x)=0$  egyenlet  $R$ -nél kisebb pozitív gyökeinek számával,  $M$ -mel egyenlő. A bizonyításból még több is kiderült. Ha ugyanis  $\alpha_k, \beta_k, \dots, \nu_k$  jelentik rendre a  $\varphi_k(x)f(x)$  hatványsorában azon tagok kitevőit, a melyek után jelváltás lép föl, akkor ezeknek száma  $k \geq K$ -ra nézve  $M$  és a pozitív  $\delta$ -t tetszőleges kicsinyre választva a

$$\frac{c_{k, \alpha_k-1}}{c_{k, \alpha_k}}, \quad \frac{c_{k, \beta_k-1}}{c_{k, \beta_k}}, \dots, \quad \frac{c_{k, \nu_k-1}}{c_{k, \nu_k}}$$

hányadosok közül az első  $m_1$  a  $(\xi_1-2\delta, \xi_1+2\delta)$ , a következő  $m_2$  a  $(\xi_2-2\delta, \xi_2+2\delta)$ , és így tovább, az utolsó  $m_p$  a  $(\xi_p-2\delta, \xi_p+2\delta)$  intervallumba esik, ha  $k \geq K$  ( $\delta \geq K$ ). Nyilvánvaló, hogy  $K(\delta)$  értéke a  $\delta$  recziprok értékével együtt monoton nő. Válasszunk tehát egy  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$  monoton 0-hoz konvergáló pozitív számsorozatot és határozzuk meg a hozzátartozó  $K(\delta_1), K(\delta_2), K(\delta_3), \dots$  monoton növekvő sorozatot. Ha  $k \geq K(\delta_\omega)$ , akkor a felírt hányadosok sorozatában az első  $m_1$  a  $\xi_1$  gyöktől, a következő  $m_2$  a  $\xi_2$  gyöktől és így tovább, az utolsó  $m_p$  a  $\xi_p$  gyöktől  $2\delta_\omega$ -nál kevesebbel különbözik. Kimondhatjuk tehát hogy a

$$\lim_{k=\infty} \frac{c_{k, \alpha_k-1}}{c_{k, \alpha_k}}, \quad \lim_{k=\infty} \frac{c_{k, \beta_k-1}}{c_{k, \beta_k}}, \dots, \quad \lim_{k=\infty} \frac{c_{k, \nu_k-1}}{c_{k, \nu_k}}$$

határértékek léteznek és rendre megadják az  $f(x)=0$  egyenlet 0 és  $R$  közé eső gyökeit, mindegyiket annyiszor, a hányszoros gyöke az egyenletnek.



*III. tétel.* Föltevés szerint  $f(x)$  hatványsorának konvergenciasugara  $r \leq R$  ( $r$  véges vagy végtelen) és  $f(x)$  az  $x = r$  helyen divergens oly módon, hogy együtthatósorozatában csak véges számú jelváltás lép föl. Legyenek az együtthatók  $a_N$ -től kezdve mind egyenlő előjelűek; feltehetem, hogy pozitívok, mert ellenkező esetben  $f(x) = 0$  helyett a  $-f(x) = 0$  egyenletet vizsgálom, a mely két egyenlet gyökei megegyeznek. LAGUERREnek a bevezetésben V. alatt idézett tételéből következik, hogy akkor az  $f(x) = 0$  egyenlet  $r$ -nél kisebb pozitív gyökeinek száma nem haladhatja meg  $N$ -et, tehát véges. Nem megszorítás, ha felteszem, hogy  $f(0) = a_0 \neq 0$ ; hogy pedig  $x = r$  nem gyöke az egyenletnek, az a feltevésekből következik. Legyenek ismét az egyenlet pozitív gyökei nagyság szerint rendezve  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$  és multiplicitásuk legyen rendre  $m_1, m_2, \dots, m_p$ , a hol

$$m_1 + m_2 + \dots + m_p = M \leq N.$$

Másrészt az is következik a föltevésekből, hogy  $f(x)$  és összes deriváltja minden pozitív határon túl nő, ha  $x$  az  $r$ -hez közeledik; ugyanis  $f(x)$  egy  $(N-1)$ -edfokú polinómnak és egy hatványsornak összege, a mely utóbbinak minden együtthatója pozitív és az  $x = r$  helyen divergens. Meghatározható tehát  $g < r$  úgy, hogy  $f(x)$  és első  $N$  deriváltja egy közös pozitív  $P$  korlát fölött maradjanak, ha  $x \geq g$ , míg a következő deriváltak a változó minden pozitív értékénél pozitívok.

A bizonyításnál külön kell választani azt a két esetet, ha  $r$  véges és ha  $r$  végtelen. Legyen  $\varrho$  és  $\tau$  jelentése ugyanaz, mint az I. tétel bizonyításánál volt,  $G$ -t azonban a következő módon állapítom meg. Ha  $r$  véges szám, akkor legyen  $G = \frac{g+r}{2}$ ; ha  $r$  végtelen nagy, akkor legyen  $G > 1$  és tegyen eleget a következő egyenlőtlenségnek:

$$|a_0| + \dots + |a_{N-1}| < G a_N.$$

Legyen  $\delta$  úgy meghatározva, hogy

- a)  $\delta < \tau < \xi_1 - \delta$ ;
- b)  $\xi_i + 2\delta < \xi_{i+1} - 2\delta$ ,  $i = 1, 2, \dots, p-1$ ;

$$c) \quad \xi_p + 2\delta < G;$$

$$d) \quad \delta < G - g = \frac{r-g}{2}, \text{ ha } r \text{ véges szám.}$$

A  $(0, r)$  intervallum felosztása ugyanaz, mint az I. tétel bizonyításánál a  $(0, R)$ -é volt, csak az utolsó részintervallumot szakítom két részre:

$$(0, \tau), (\tau, \xi_1 - \delta), \dots, (\xi_p - 2\delta, \xi_p + 2\delta), (\xi_p + \delta, G), (G, r)$$

Jelentse megint  $f_0$  az  $|f(x)|$  alsó határát az összes másodfajú részintervallumban,  $f_i$  pedig az  $\frac{1}{m_i!} |f^{(m_i)}(x)|$  alsó határát a  $(\xi_i - 2\delta, \xi_i + 2\delta)$  intervallumban; legyen  $f$  a legkisebb az  $f_0, f_1, \dots, f_p$  és  $\frac{P}{N!}$  számok között.

Legyen másrésről  $F$  a legnagyobb az  $F_0, F_1, \dots, F_{N+1}$  számok közt, a hol  $F_i$  jelenti az  $F^{(i)}(x)$  felső határát a  $(0, G)$  intervallumban.

Válasszuk  $K$ -t úgy, hogy  $k \geq K$ -ra nézve

$\alpha)$   $\varphi_k$  hatványsora legalább  $(N+1)$ -szeresen pozitív legyen;

$\beta)$  a  $(0, G)$  intervallum minden  $\delta$  kiterjedésű részéhez legalább 1, minden  $4\delta$  kiterjedésű részéhez legalább  $M+1$  tag tartozzék az  $(A)$  sorozatból;

$\gamma)$  legyen a pozitív  $\varepsilon$  úgy választva, hogy  $2\varepsilon(F+1) < f$  legyen és teljesüljenek az így megválasztott  $\varepsilon$ -ra nézve az előbbi fejezetben levezetett  $(f_0^*)$  és  $(f_p^*)$  egyenlőtlenségek, ha  $k \geq K$ ,  $p \leq N$  és  $\frac{c_{n-1}}{c_n}$  a  $(\tau, G)$  intervallum pontja.

Ezek után bebizonyítom, hogy a  $(G, r)$  intervallumhoz tartozó részsorozat nem tartalmaz jelváltást.

Legyen először  $r$  véges szám és a  $(G, r)$  intervallumhoz tartozó részsorozat legyen

$$A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$$

Fordítsuk figyelmünket az

$$A'_{n+1}, A'_{n+2}, \dots$$

$$A''_{n+1}, A''_{n+2}, \dots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$A^{(N)}_{n+1}, A^{(N)}_{n+2}, \dots$$



sorozatokra. Ha  $A_{n+1}$  az  $(A)$  sorozat első tagja, a mely már a  $(G, r)$  intervallumhoz tartozik, akkor  $\frac{c_n}{c_{n+1}} \geq G$  és a  $\beta)$  feltétel szerint  $g \leq \frac{c_{n-1}}{c_n} \leq G$ , mivel  $\delta < G - g$ .

A felírt sorozatok első tagja elé képzeljük rendre az

$$A_n, A'_n, A''_n, \dots, A_n^{(N)}$$

számokat írva, a melyek mind pozitívok. Ugyanis a  $\gamma)$  feltétel szerint teljesül

$$\left| \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right) - A_n^{(\nu)} \right| < 2\varepsilon (F+1) < f \leq \frac{F}{N!} \leq \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right),$$

ha  $\nu \leq N$  és  $g \leq \frac{c_{n-1}}{c_n} \leq G$ ; ezen egyenlőtlenségből pedig következik, hogy  $A_n^{(\nu)}$  előjelre megegyezik  $f^{(\nu)}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)$ -nel, a mely pozitív, mivel  $g \leq \frac{c_{n-1}}{c_n}$ . A felírt sorozatok közül az utolsónak azonban minden tagja pozitív, mert ezek  $f(x)$  hatványsorának csak a pozitív együttthatóiból és pozitív faktorokból összeadás és szorzás által keletkeznek. Minthogy továbbá  $\varphi_k$  hatványsora  $a)$  szerint legalább  $(N+1)$ -szeresen pozitív, az

$$A_{n+1}^{(v-1)} - A_n^{(v-1)} = c \cdot A_n^{(v)} \quad (v=1, 2, \dots, N)$$

identitásban a  $c$  faktor pozitív. Ezen formula alkalmazásával kiderül, hogy az utolsó sorozat valamennyi tagjának és az  $A_n^{(N)}, A_n^{(N-1)}$  számoknak pozitivitásából következik az utolsó-előtti sorozat valamennyi tagjának pozitivitása; ebből és a  $A_n^{(N-1)}, A_n^{(N-2)}$  pozitivitásából az azt megelőző sorozat valamennyi tagjának pozitivitása és így tovább, végül az

$$A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$$

tagok pozitivitása, qu. e. d.

Ha  $r$  végtelen nagy, akkor a  $(G, r)$  intervallumhoz tartozó

$$A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$$

tagok pozitivitása az

$$A_v = \frac{c_{v-N}}{c_v} \left\{ a_0 \frac{c_v}{c_{v-N}} + a_1 \frac{c_{v-1}}{c_{v-N}} + \dots + a_{N-1} \frac{c_{v-N+1}}{c_{v-N}} + a_N + \right. \\ \left. + a_{N+1} \frac{c_{v-N-1}}{c_{v-N}} + \dots + a_v \frac{c_0}{c_{v-N}} \right\}$$

formulából direkte következik. A kapcsos zárójelben az  $a_N$ -et követő összes tag ugyanis pozitív, míg

$$a_0 \frac{c_v}{c_{v-N}} + a_1 \frac{c_{v-1}}{c_{v-N}} + \dots + a_{N-1} \frac{c_{v-N+1}}{c_{v-N}} + a_N \geq a_N - \\ - \left\{ |a_0| \frac{c_v}{c_{v-N}} + \dots + |a_{N-1}| \frac{c_{v-N+1}}{c_{v-N}} \right\} > a_N - \\ - \frac{1}{G} \left\{ |a_0| + \dots + |a_{N-1}| \right\} > 0,$$

tehát  $A_v > 0$ , ha  $\frac{c_{v-1}}{c_v} \geq G$ , vagyis ha  $v = n+1, n+2, \dots$

Ennek a pontnak elintézése után a III. tétel be is van bizonyítva. Tényleg nem kell egyebet tenni, mint szóról-szóra ismételni, a mit az I. és II. tétel bizonyításánál a  $(0, G)$  intervallum másodfajú és elsőfajú részintervallumairól és azután az egyenlet gyökeinek megközelítéséről mondtam, minthogy eltérést a bizonyításban az  $(A)$  sorozatnak csak a  $(G, r)$  intervallumhoz tartozó részsorozata okoz.

### 7. §. Az ismeretes speciális esetek.

A kimutatott tételek speciális generatrixsorozatokra ismeretesek voltak. LAGUERRE és FEKETE mutatta ki őket, ha

$$\varphi_k(x) = e^{kx}, \quad R = +\infty;$$

FEKETE és PÓLYA, ha

$$\varphi_k(x) = (1-x)^{-k}, \quad R = 1;$$

szerző, ha

$$\varphi_k(x) = (1+x)^k, \quad R = +\infty.$$

Hogy ezen tételek a most bebizonyított tételek alá tartoznak, belátható abból, hogy a felírt függvények sorai a 3. §-ban



felállított 5 feltételt kielégítik. Erről egyszerű számítással meggyőződhetünk.

Először  $e^{kx}$  hatványsorát veszem:

$$e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Az első feltétel teljesül, mert minden együttható zérustól különböző, pozitív szám. A harmadik feltétel teljesülése is könnyen belátható. A

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{n}{k}$$

hányados az  $(a, a+\varepsilon)$  intervallumba esik, ha

$$k \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{és} \quad n = [k(a+\varepsilon)],$$

a hol  $[x]$  jelenti a legnagyobb egész számot, a mely  $x$ -nél nem nagyobb. A többi feltétel teljesüléséről meggyőződhetünk, ha kiszámítjuk a következő determinánst:

$$\begin{aligned} [n, n+1, \dots, n+p] &= \begin{vmatrix} \frac{k^n}{n!} & \frac{k^{n+1}}{n+1!} & \dots & \frac{k^{n+p}}{n+p!} \\ \frac{k^{n-1}}{n-1!} & \frac{k^n}{n!} & \dots & \frac{k^{n+p-1}}{n+p-1!} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{k^{n-p}}{n-p!} & \frac{k^{n+1-p}}{n+1-p!} & \dots & \frac{k^n}{n!} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{k^{n-p} k^{n+1-p} \dots k^n}{n! n+1! \dots n+p!} 1! 2! \dots p! k^{1+2+\dots+p} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+p}{1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \binom{n}{p} & \binom{n+1}{p} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1! 2! \dots p! k^{n(p+1)}}{n! n+1! \dots n+p!}, \end{aligned}$$

tehát  $e^{kx}$  hatványsora végtelenszeresen pozitív (2. feltétel).

Továbbá

$$\begin{aligned}
 & \frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} = \\
 & + \left| \begin{array}{ccc} \frac{k^{n-\nu}}{n-\nu!} & \frac{k^{n+1}}{n+1!} & \dots & \frac{k^{n+p}}{n+p!} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{k^{n-\nu-p}}{n-\nu-p!} & \frac{k^{n+1-p}}{n+1-p!} & & \frac{k^n}{n!} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} \frac{k^n}{n!} & \dots & \frac{k^{n+p}}{n+p!} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{k^{n-p}}{n-p!} & \dots & \frac{k^n}{n!} \end{array} \right| = \\
 & = \frac{n!}{n-\nu! k^\nu} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{n-\nu}{1} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+p}{1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \binom{n-\nu}{p} & \binom{n+1}{p} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{n}{1} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+p}{1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \binom{n}{p} & \binom{n+1}{p} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{array} \right| = \\
 & = \frac{c_{n-\nu}}{c_n} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{n-\nu}{1} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{n+p}{1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \binom{n-\nu}{p} & \binom{n+1}{p} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{array} \right| = \frac{c_{n-\nu}}{c_n} D_{\nu, p}.
 \end{aligned}$$

De

$$D_{\nu, p} = \binom{p+\nu}{n}.$$

A felírt identitás nyilván helyes minden  $p$ -re, ha  $\nu=0$  és és minden  $\nu$ -re, ha  $p=1$ , a mi egyszerű számításal rögtön adódik; könnyű továbbá kimutatni a

$$D_{\nu, p+1} - D_{\nu-1, p+1} = D_{\nu, p}$$

formulát, a melynek ismételt alkalmazásával nyerjük a felírt identitást minden  $\nu$  és  $p$ -re. Ebből a formulából kapjuk, hogy

$$\binom{p+\nu}{p} \frac{c_{n-\nu}}{c_n} - \frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} \equiv 0,$$

tehát  $e^{kx}$  hatványsorára  $k$  minden értéke mellett a 4. és 5. feltételek is bőven teljesülnek.



Másodszor az  $(1+x)^k$  polinómot veszem.

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Az első feltétel teljesül: az első  $k+1$  együttható pozitív, a többi zérus. A

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{n}{k-n+1}$$

hányados az  $(a, a+\varepsilon)$  intervallumba esik ( $a \geq 0$ ,  $a+\varepsilon \leq G$ ), ha

$$k+1 \geq \frac{1+G}{\varepsilon}, \quad n = \left[ \frac{a}{1+a} (k+1) \right] + 1,$$

tehát a harmadik feltétel is teljesül. Továbbá

$$\begin{aligned} [n, n+1, \dots, n+p] &= \begin{vmatrix} \binom{k}{n} & \binom{k}{n+1} & \dots & \binom{k}{n+p} \\ \binom{k}{n-1} & \binom{k}{n} & \dots & \binom{k}{n+p-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \binom{k}{n-p} & \binom{k}{n+1-p} & \dots & \binom{k}{n} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{k!^{p+1}}{n! \, n+1! \dots n+p! \, k-n+p! \, k-n+p-1! \dots k-n!} \Delta, \end{aligned}$$

a hol

$$\Delta = \begin{vmatrix} (k-n+1)(k-n+2)\dots(k-n+p)\dots(k-n-p+1)\dots(k-n) \\ n(k-n+2)\dots(k-n+p) & \dots & (n+p)(k-n-p+2)\dots(k-n) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ n(n-1)\dots(n-p+1) & \dots & (n+p)(n+p-1)\dots(n+1) \end{vmatrix}$$

$\Delta$  első sorához hozzáadva a másodikat, ahhoz a harmadikat és így tovább, végül az utolsóelőttihez az utolsót, azután a sorokból a közös faktorokat kiemelve a determináns elemei fokozatosan megfoszthatók a  $k$ -t tartalmazó faktoroktól és nyerjük, hogy

$$[n, n+1, \dots, n+p] = \frac{k!^{p+1} (k+1)^p (k+2)^{p-1} \dots (k+p)}{n! n+1! \dots n+p! k-n+p! k-n+p-1! \dots k-n!} D,$$

a hol

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ n & \dots & n+p \\ n(n-1) & \dots & (n+p)(n+p-1) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ n(n-1) \dots (n-p+1) & \dots & (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) \end{vmatrix};$$

végül könnyű számitással kapjuk, hogy

$$D = p! p-1! \dots 2! 1!,$$

tehát  $(1+x)^k$  a 2. feltételt  $k$  minden értékénél teljesíti.

Továbbá úgy a számlálóban, mint a nevezőben lépésről lépésre ugyanazon redukeziókat végezve, mint az imént a nevező kiszámitásánál, nyerjük, hogy

$$\frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} = \frac{\binom{k}{n-\nu}}{\binom{k}{n}} \frac{(k-n+1)(k-n+2) \dots (k-n+p)}{(k-n+\nu+1)(k-n+\nu+2) \dots (k-n+\nu+p)} H_{\nu, p},$$

a hol

$$H_{\nu, p} = \frac{1}{p! p-1! \dots 2! 1!} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ n-\nu & n+1 & \dots & n+p \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (n-\nu) \dots (n-\nu-p+1) & (n+1) \dots (n-p+2) & \dots & (n+p) \dots (n+1) \end{vmatrix}.$$

Azt állítom, hogy  $H_{\nu, p} = \binom{\nu+p}{\nu}$ . Ezen formula megint rögtön igazolható minden  $p$ -re, ha  $\nu=0$  és minden  $\nu$ -re, ha  $p=1$ . Továbbá könnyű számitással meggyőződhetünk a



$$H_{\nu, p+1} - H_{\nu-1, p+1} = H_{\nu, p}$$

reláció helyességéről, a melynek ismételt alkalmazásával a felírt identitás minden  $\nu$  és minden  $p$ -re igazolást nyer. Akkor azonban:

$$\begin{aligned} & \frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} = \\ &= \binom{p+\nu}{\nu} \frac{c_{n-\nu}}{c_n} \frac{k-n+1}{k-n+\nu+1} \dots \frac{k-n+p}{k-n+\nu+p}, \end{aligned}$$

a miből a 4. és 5. feltétel teljesülése leolvasható.

Végül  $(1-x)^{-k}$  hatványsorára

$$(1-x)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k-1+n}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

az első feltétel teljesül, mert minden együtthatója zérustól különböző pozitív szám. A harmadik feltétel is teljesül, mert a

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{n}{k+n-1}$$

hányados az  $(a, a+\varepsilon)$  intervallumba esik ( $a \geq 0, a+\varepsilon \leq 1$ ), ha

$$k \geq 1 + \frac{1}{\varepsilon}$$

és

$$n = \left[ \frac{a}{1-a} (k-1) \right] + 1.$$

Hasonló számítással, mint előbb, nyerjük továbbá, hogy

$$\begin{aligned} & [n, n+1, \dots, n+p] = \\ &= \frac{k+n-p!}{k! p+1!} \frac{k+n-p+1! \dots k+n!}{n! n+1! \dots n+p!} k^p (k-1)^{p-1} \dots (k-p+1) D, \end{aligned}$$

a hol ismét

$$D = p! p-1! \dots 2! 1!$$

tehát a második feltétel biztosan teljesül, ha  $k \geq P$ . Végül

$$\frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} = \\ = \binom{p+\nu}{p} \frac{c_{n-1}}{c_n} \frac{k+n}{k+n-\nu} \frac{k+n-1}{k+n-\nu-1} \dots \frac{k+n-p+1}{k+n-\nu-p+1};$$

ha

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} = \frac{n}{k+n-1} \leq G < 1,$$

akkor

$$n \leq \frac{G}{1-G} (k-1)$$

és

$$\frac{pn}{k-p+1} \leq \frac{pG}{1-G} \frac{k-1}{k-p+1} \leq p^2 \frac{G}{1-G} \leq \frac{P^2 G}{1-G},$$

ha

$$k > P \geq p.$$

E szerint

$$\frac{k+n}{k+n-\nu} \dots \frac{k+n-p+1}{k+n-\nu-p+1} < e^{\frac{\nu p}{k+n-\nu-p+1}} \leq e^{\frac{\nu p}{k-p+1}} \leq e^{\frac{P^2 G}{1-G}} = A, \\ \frac{[n-\nu, n+1, \dots, n+p]}{[n, n+1, \dots, n+p]} \leq A \binom{p+\nu}{p} \frac{c_{n-\nu}}{c_n},$$

ha

$$k > P,$$

tehát a 4. feltétel is teljesül. Ha pedig  $n \leq L$ , akkor megválasztható  $K$  úgy, hogy  $k \geq K$ -ra nézve

$$1 \leq \frac{k+n}{k+n-\nu} \dots \frac{k+n-p+1}{k+n-\nu-p+1} \leq e^{\frac{\nu p}{k-p+1}} \leq e^{\frac{LP}{k-p+1}} \leq 1 + \varepsilon,$$

tehát az 5. feltétel is ki van elégítve.

### 8. §. A feltételek szükségességéről.

A  $(\varphi)$  sorozatra a III. §-ban kimondott feltételek elegendők a IV. §-ban kimondott tételek fennállásához. Hogy szükségese-e, nem sikerült eldöntennem; erre vonatkozólag csak néhány megjegyzésre szorítkozhatom. Ha a  $(\varphi)$  sorozat a



problémának a  $(0, R)$  intervallumhoz tartozó generatrixsorozata, akkor egy bizonyos  $k$  indextől kezdve  $\varphi(x)$  minden együtt-hatója egyenlő előjelű. Legyen ugyanis  $0 < a < R$  és alkalmaz-zuk az I. tételt az  $a+x=0$  és  $a-x=0$  egyenletekre. Akkor megadható  $K$  úgy, hogy minden  $k \geq K$  indexre nézve az  $(a+x) \varphi_k(x)$  hatványsorában egy jelváltás sincs, az  $(a-x) \varphi_k(x)$  hatványsorában pedig pontosan egy jelváltás lép föl. Ezen so-rok együtthatói

$$ac_0, ac_1+c_0, \dots, ac_{n-1}+c_{n-2}, ac_n+c_{n-1}, \dots$$

és

$$ac_0, ac_1-c_0, \dots, ac_{n-1}-c_{n-2}, ac_n-c_{n-1}, \dots$$

Ha  $c_0$  pl. pozitív, akkor az első sorozat tagjai mind nem negatívok, a második sorozat első  $n$  tagja nem negatív, az  $(n+1)$ -edik negatív, a következők nem pozitívok; minthogy

$$ac_v - c_{v-1} \geq 0,$$

ha

$$v \leq n-1,$$

szükségképen

$$c_v \geq \frac{c_{v-1}}{a}:$$

$c_{v-1}$  pozitivitásából tehát következik  $c_v$  pozitivitása, míg  $v \leq n-1$ ; minthogy pedig  $c_0 > 0$ , kell, hogy  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  is zérustól különböző pozitív számok legyenek. Ugyanúgy következik az

$$ac_v - c_{v-1} \leq 0,$$

ha

$$v \geq n$$

egyenlőtlenségből a

$$c_v \leq \frac{c_{v-1}}{a};$$

ha tehát  $c_{v-1}$  negatív volna és  $v \geq n$ , akkor minden következő együttható is csak negatív lehetne; de az

$$ac_v + c_{v-1} \geq 0$$

egyenlőtlenségnek minden  $\nu$  indexre kell teljesülnie, tehát egyik együttható sem lehet negatív.

Ha tehát  $c_{\nu-1} = 0$ , akkor a

$$0 \leq c_\nu \leq \frac{c_{\nu-1}}{a}$$

egyenlőtlenségek maguk után vonják minden következő együttható eltűnését. Tehát a III. §. első feltétele és a 2. feltétel  $P=0$ -ra nézve szükséges is.

Szükséges továbbá a 3. feltétel is. Tegyük fel ugyanis, hogy végtelen sok  $k$  indexre nézve a

$$\frac{c_{k,0}}{c_{k,1}}, \dots, \frac{c_{k,n-1}}{c_{k,n}}, \dots$$

sorozat egy tagja sem esnék az  $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$  intervallumba  $\left(a - \frac{\varepsilon}{2} \geq 0, a + \frac{\varepsilon}{2} \leq G < R\right)$ ; legyen a  $(\varphi)$  sorozatnak ezen indexhez tartozó részsorozata

$$\varphi_\alpha, \varphi_\beta, \dots, \varphi_\lambda, \dots,$$

a mely tehát szintén a  $(0, R)$  intervallumhoz tartozó generatrix-sorozat. Alkalmazzuk a II. tételt az  $a - x = 0$  egyenletre. Jelentse  $n_\lambda$  az  $(a - x)$   $\varphi_\lambda(x)$  együttható sorozatában azon tag indexét, a mely után az egyetlen jelváltás fellép; akkor a

$$\frac{c_{\lambda, n_\lambda}}{c_{\lambda, n_\lambda+1}}$$

hányados limesének, ha  $\lambda$  a részsorozat indexein nő minden határon túl, meg kellene egyeznie  $a$ -val, a mi nem lehetséges, ha ez a hányados az  $\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$  intervallumba nem juthat bele. Tehát a  $(\varphi)$  sorozatra vonatkozó 3. feltétel is szükséges.

*Bálint Elemér.*



## NEGYEDRENDŰ MÁSODFAJÚ GÖRBÉKRŐL.

A negyedrendű görbék közül eddig a másodfajúnak, azaz az egy kettősponttal birónak elmélete van a többihez képest a legkevésbé kidolgozva. Irodalmát illetőleg utalunk G. KOHN encyklopediaczikkére.<sup>1</sup>

A negyedrendű másodfajú görbét a következőkben  $C_4^2$ , vagy  $\Gamma_4^2$ -vel fogjuk jelölni.

Az első és második pontban egy  $C_4^2$  görbére új tételeken kívül ismert tételeket is fogunk kimutatni. Ezeknek újabb kimutatását nem tarthatjuk fölöslegesnek egyfelől a dolgozat teljessége kedvéért, másrészt pedig azért, mert módszerünk különbözik W. R. W. ROBERTS módszerétől, melylyel azokat a tételeket ABEL-féle integrálok segítségével igazolta és különbözik JAN de VRIES<sup>3</sup> algebrai geometriai módszerétől, melylyel ROBERTS tételeit igazolta. Tárgyalásunkban azokra a kivételes esetekre is ki fogunk terjeszkedni, a melyeket JAN de VRIES figyelmen kívül hagyott, a mikor a  $C_4^2$  görbe kettőspontjának egyik vagy mindkét érintője inflexió érintő.

A harmadik pontban egy  $C_4^2$  görbének egy  $\Gamma_4^2$ -be való birationalis transformatiójával foglalkozunk, míg a negyedik pontban a  $C_4^2$  görbe realitási viszonyairól szólnunk.

1. Minden  $C_4^2$  görbe egyenletét homogén  $(x, y, z)$  koordinata-

<sup>1</sup> Encykl. der math. Wiss. Bd. III<sub>2</sub>, Heft 4. pag. 547—548.

<sup>2</sup> Proc. Lond. Math. Soc. 1894.

<sup>3</sup> Sitzungsberichte der Wiener Akad. Bd. 104. p. 58, és Nieuw Archief voor Wiskunde 1896.

rendszerben a kettőspontnak az  $O \equiv (0, 0, 1)$  pontba való helyezése által a következő alakban lehet írni:

$$f(x, y, z) \equiv z^2 f_2(x, y) + 2zf_3(x, y) + f_4(x, y) = 0, \quad (1)$$

a hol  $f_k(x, y)$  ( $k = 2, 3, 4$ )  $x$  és  $y$ -nak homogén  $k$ -ad fokú függvényét jelenti.

Az

$$f_2(x, y) = 0$$

egyenlet adja a  $C_4^2$  görbe  $O$  kettőspontjában érintő két egyenes egyenletét.

Az  $O$  kettőspont első polaris görbéjének egyenlete:

$$g(x, y, z) = z \cdot f_2(x, y) + f_3(x, y) = 0. \quad (2)$$

A  $g = 0$  harmadrendű görbének az  $O$  pont kettőspontja és e görbét az  $O$ -ban érintő két egyenes egyenlete ugyanaz, mint a  $C_4^2$  görbénél, vagyis e két érintő egyenlete  $f_2 = 0$ .

Egyelőre azt a megszorítást tesszük, hogy a  $g = 0$  harmadrendű görbe nem degenerál.

Ily megszorítás mellett, mivel az  $f = 0$  görbe keresztülmegy az  $f_2 = 0$  és  $g = 0$  görbék minden metszéspontján (a metszéspontokat a megfelelő multiplicitással számítva), azért a NOETHER-féle alaptétel<sup>1</sup> szerint írhatjuk, hogy

$$f \equiv k \cdot f_2 - og, \quad (3)$$

a hol  $k = 0$  egy kúpszelet és  $o = 0$  egy egyenes egyenletét jelentik.

Az  $O$ -ból a  $C_4^2$  görbéhez húzható hat érintő érintéspontjait, melyeket a  $g = 0$  görbe metszi ki a  $C_4^2$ -ből, jelöljük  $T_1, T_2, \dots, T_6$ . Minthogy ez a 6 pont nincs rajta az  $f_2 = 0$  egyenespáron, azért a (3) egyenlőség miatt szükségképen rajta van a  $k = 0$  kúpszeleten.

Legyen a kettőspont két érintőjének negyedik metszéspontja

<sup>1</sup> Lásd L. BERZOLARI: Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven, Encykl. d. math. Wiss. Bd. III<sub>2</sub>. Heft 3, p. 405—406.



a  $C_4^2$  görbével  $A_1, A_2$ . Minthogy e két ponton nem megy keresztül a  $g=0$  görbe, azért szükségképen az  $o=0$  egyenes megy rajtuk keresztül. Ez az egyenes a  $C_4^2$  görbét még egy pontpárban,  $B_1, B_2$  ben metszi, a melyek meg a  $k=0$  kúpszeleten fekszenek.

A  $k=0$  kúpszeletet BERTINI-féle kúpszeletnek<sup>1</sup> nevezzük E. BERTINI után. Ő az  $(n-2)$ -szeres ponttal bíró  $n$ -ed rendű görbékre talált ki olyan általános tételt, melynek most kimutatott tételünk csak speciális esete.

Eddig kimutatott tételeinket így foglalhatjuk egybe:

Egy  $C_4^2$  kettőspontjából a görbéhez húzható hat érintő érintéspontja egy kúpszeleten, a BERTINI-féle kúpszeleten fekszik. A BERTINI-féle kúpszelet a görbét még oly  $B_1, B_2$  pontpárban metszi, a mely azzal a pontpárral, a melyet a kettőspont két érintője metsz ki a  $C_4^2$  görbéből, egy  $o$  egyenesen fekszik.

Ez az  $o$  egyenes az  $O$  kettőspontnak a BERTINI-féle kúpszeletre vonatkozó polárisa és így a  $B_1, B_2$  pontpárban a BERTINI-féle kúpszelet érintői a kettősponton mennek keresztül.

A (3) egyenlőségből u. i. az (1) és (2) tekintetbevételével kapjuk, hogy

$$f_2 \frac{\partial k}{\partial z} \equiv of_2 + (zf_2 + f_3) \left( \frac{\partial o}{\partial z} + 2 \right).$$

Ebből következik, minthogy  $f_3$  nem osztható  $f_2$ -vel, hogy  $\frac{\partial o}{\partial z} + 2 \equiv 0$  és így

$$\frac{\partial k}{\partial z} = 0 \ (x, y, z).$$

Az  $O$  kettősponton keresztülmenő sugársor egy tetszőleges sugara messe a  $C_4^2$ -t  $P_1$  és  $P_2$ , a  $k$ -t  $Q_1$  és  $Q_2$  pontokban. E négy pont harmonikus pontnégyest alkot. Alkossuk meg ugyanis e négy pont

<sup>1</sup> Lásd G. KOHN encyklopédia-cikkét i. h. V. ö. K. DOEHLEMAN: Geometrische Transformationen II. Teil. p. 16—174.



$$h = \frac{P_1 Q_1}{P_2 Q_1} : \frac{P_1 Q_2}{P_2 Q_2} = \frac{P_1 Q_1 \cdot P_2 Q_2}{P_1 Q_2 \cdot P_2 Q_1}$$

kettősviszonyát.

Ez a kettősviszony sehol sem válhat nullává vagy végtelenné.

Ha ugyanis nullává vagy végtelenné válnék, az csak oly sugarakon történhetnék, a hol egy  $P$  egy  $Q$ -val összeesnék, vagyis csak az  $OT_1$ ,  $OT_2, \dots, OT_6$  és az  $OB_1$  és  $OB_2$  sugarakon. De ezeken sem válhatik nullá vagy végtelenné, mivel ezen 8 egyenes bármelyikén a  $h$  számlálójában és nevezőjében egy-egy vonaldarab ugyanolyan rendűen válik végtelen kicsinnyé.

Ebből pedig egy ismert tétel szerint<sup>1</sup> következik, hogy  $h = \text{const.}$  és pedig  $h = -1$ , mert a  $Q_1$  pont a BERTINI-féle kúpszeletnek tetszőleges pontja s mint ilyent föl lehet  $Q_2$ -vel cserélni, a nélkül, hogy  $h$  értéke megváltoznék.

Ennélfogva az  $C_4^2$  kettőspontján átmenő sugársor sugarai által a görbéből és BERTINI-féle kúpszeletből kimetszett pont-párok egymást harmonikusan választják el.

Eddigi tételeinket azzal a megszorítással vezettük le, hogy az  $f = 0$  görbe  $g = 0$  első polárgörbéje nem degenerál. Most a kivételes esetet fogjuk vizsgálni.

Ha degenerál a  $g = 0$  görbe, akkor vagy a kettőspont egyik érintőjére és a kettősponton keresztülmenő oly kúpszeletre degenerál, melyet a kettőspont másik érintője érint, vagy pedig a kettőspont két érintőjére és egy azoktól különböző egyenesre degenerál.

Az első, illetőleg a második eset akkor áll elő, ha  $C_4^2$  görbe kettőspontjának egyik, illetőleg mindkét érintője inflexiós érintő.

A BERTINI-féle kúpszelet szerepét az első esetben az a kúpszelet veszi föl, a melyre a  $g = 0$  görbe degenerál, a második esetben pedig az  $O$  pont és az az egyenes, melyre  $g = 0$  görbe a kettőspontok érintőjén kívül szétesik.

<sup>1</sup> L. H. G. ZEUTHEN: Abzählende Methoden, Encyclopädie der math. Wiss. Bd. III<sub>2</sub>, Heft 3, p. 277—278, l. még Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie (Leipzig 1914). p. 84 s köv.



Kimondott tételeink ezekben a kivételes esetekben is érvényesek maradnak. Így legutóbbi tételünk is. Ez a tétel most a polárgörbék ismeretes tulajdonságát mondja ki, mert a BERTINI-féle kúpszelet a kettőspont első polárgörbéjének részét képezi.

Ha a BERTINI-féle kúpszelet degenerál, akkor  $B_1B_2$  pontpár összeesik annak a két egyenesnek metszéspontjába, a melyekre a kúpszelet degenerál. És viszont, ha a  $B_1B_2$  pontpár összeesik és különbözik a kettősponttól, akkor a BERTINI-féle kúpszeletnek degenerálnia kell, mint olyan kúpszeletnek, melyhez egy kívül fekvő pontból csak egy érintő húzható.

Ennélfogva a BERTINI-féle kúpszelet akkor degenerál, ha a kettőspont érintőinek negyedik metszéspontjain,  $A_1A_2$ -n átmenő egyenes az  $A_1A_2$  pontokon kívül érinti a  $C_4^2$  görbét.

2. Előbbi pontban kimutatott tétel szerint a  $C_4^2$  egy projektív módon általánosított inversio által önmagába megy át. Az inversio centruma az  $O$  kettőspont, az inversio kúpszelet pedig a BERTINI-féle kúpszelet, a képzetes körpontok szerepét a  $B_1B_2$  pontpár veszi föl.

Ez az inversió oly quadratikus CREMONA-féle transformatio,<sup>1</sup> melynek alappontjai  $O$ ,  $B_1$  és  $B_2$  pontok.

Ez az inversio tehát egy oly  $n$ -ed rendű  $C$  görbét, a melynek az  $O$  pontban  $k$ -szoros, a  $B_1$  és  $B_2$  pontban  $k_1$ - és  $k_2$ -szeres pontja van, oly  $2n - (k + k_1 + k_2)$ -rendű  $\Gamma$  görbébe visz át, a melynek  $O$ -ban  $n - (k_1 + k_2)$ ,  $B_1$ -ben  $n - (k + k_1)$ ,  $B_2$ -ben  $n - (k + k_2)$ -szeres pontja van.

Mivel az inversiókúpszelet pontjai önmagukba mennek át, azért azok a pontok, melyekben a  $C$  görbe az inversio kúpszeletet metszi, a  $\Gamma$  görbének is pontjai.

Ebből pedig következik, hogy minden olyan egyenesnek, a mely az alappontokon nem megy keresztül, olyan kúpszelet felel meg, a mely  $O$ -n,  $B_1$  és  $B_2$ -n keresztül megy. Másként kifejezve: ha a  $C_4^2$  görbéből egy tetszőleges egyenessel kimetszett négy pontot a kettőspontból a görbére projicziáljuk, oly négy

<sup>1</sup> L. K. DOEHLEMAN: Geometrische Transformationen II. Teil, p. 46—49.



pontot kapunk, a melyek  $O$ ,  $B_1$ , és  $B_2$ -vel egy kúpszeleten vannak.

Abból, hogy az inversio quadratikuss transformatio, melynek  $B_1$ -és  $B_2$  alappontjai, következik, hogy a  $B_1$ -en keresztülmenő egyenesnek a  $B_2$ -n keresztülmenő egyenes felel meg.

Ha tehát  $C_1^2$ -nek egy  $B_1$ -en átmenő egyenessel való  $B_1$ -en kívüli 3 metszéspontját a görbére projicziáljuk, a kapott pont egy  $B_2$ -n átmenő egyenesen fekszik és viszont.

A  $B_1$  és  $B_2$  centrumú sugársorok projektívek, képződményük az inversiókúpszelet.

Kimondott általános tételünkéből következik, hogy a  $B_1 B_2$ -n átmenő kúpszeletnek  $B_1 B_2$ -n átmenő kúpszelet felel meg.

Ha egy  $C$  görbe  $\Gamma$  invers ábrája a  $C$  görbével összeesik, vagyis más szóval a  $C$  görbe önmagának inverse, akkor az előző tételek alapján a következő tételeket mondhatjuk ki.

Egy olyan önmagával invers  $C$   $n$ -edrendű görbére nézve, a melynek  $O$ -ban  $k$ ,  $B_1$  és  $B_2$ -ben  $k_1$ , illetőleg  $k_2$ -szeres pontja van,  $n = k + k_1 + k_2$  és  $k_1 = k_2$ .

Ha az  $o$  egyenes ( $O$ -nak az inversio-kúpszeletre vonatkozó polárisa) a  $C$  görbét, a  $B_1$  és  $B_2$  pontokba eső  $k_1 = k_2$  számú metszésponton kívül  $A_1, A_2, \dots, A_k$  pontokban metszi (melyek között egymással vagy a  $B$ -kkel összeesők is léphetnek fel), akkor a  $O$   $k$ -szoros pont érintői az  $OA_1, OA_2, \dots, OA_k$  egyenesek.<sup>m</sup>

A  $C$  görbének az inversió-kúpszeleten levő  $B_1, B_2$ -től különböző  $T_1, T_2, \dots, T_{n+k}$  pontjainak inversei önmagukkal esvén össze, a  $OT_i$  ( $i=1, 2, \dots, n+k=2n-k_1-k_2$ ) egyenesek a  $C$  görbét két összeeső pontban metszik.

Ha ezeket a tételeket egy  $C_4^2$  (önmagával invers) görbére alkalmazzuk, az első pontban talált tételeket ismét visszakapjuk.

Kivételes eset, a mikor a  $C_4^2$  görbe kettőspontjának mindkét érintője inflexiós érintő. Az ilyen görbét jelöljük  $\bar{C}_4^2$ -vel.

Egy ilyen  $\bar{C}_4^2$  görbét ugyanis inversio helyett egy oly involutorius vagy harmonikus perspektivitás viszi át önmagába, a



*melynek centruma az  $O$  kettőspont és tengelye a BERTINI-féle kúpszelet szerepét átvevő egyenes.*

Egy  $O$ -n keresztülmenő tetszőleges egyenes a  $\bar{C}_4^2$  görbét olyan  $P_1, P_2$  pontokban metszi, a melyeket a tengely harmonikusan választ el az  $O$  ponttól és így  $P_1$ -nek  $P_2$  perspektív képe.

Minthogy az involutorius perspektivitás lineáris transformatio, ebben a pontban kimondott eredményeinket csak módosítva alkalmazhatjuk a  $\bar{C}_4^2$ -ra. Így például, ha  $\bar{C}_4^2$  egy egyenesen levő négy pontját a kettőspontból a görbére projicziáljuk, ismét egy egyenesen levő négy pontot kapunk. Az involutorius perspektivitás tengelye oly pontokban metszi a  $\bar{C}_4^2$  görbét, a melyeknek érintője  $O$ -n megy keresztül.

Az összes  $C_4^2$  görbék közül csakis a  $\bar{C}_4^2$  görbéknek van önmagukba való involutorius perspektív transformatiója.

Tegyük fel u. i., hogy egy perspektivitás egy  $C_4^2$  görbét önmagába visz át; kimutatjuk, hogy a  $C_4^2$  görbe csak  $\bar{C}_4^2$  lehet.

Könnyű belátni, hogy a perspektivitás centruma csak az  $O$  pont lehet. Ha  $T_i, T_k$  az  $O$ -ból a görbéhez menő két érintő érintéspontja, akkor a  $T_i T_k$  egyenes önmagának felel meg, tehát vagy az involutorius perspektivitás tengelye, vagy egy  $O$ -n keresztülmenő egyenes. Az utóbbi esetben az  $O$  pont egyik érintője inflexiós érintő. Minthogy a 6  $T$  pont közül négy a perspektivitás tengelyére esik, a másik kettőnek  $O$ -ba kell esnie és így  $O$  mindkét érintője inflexiós érintő.

3. Az előbbi pont alatt láttuk, hogy egy  $C_4^2$  görbének önmagába való inversiója quadratikusan CREMONA-féle transformatio. Ki fogjuk mutatni tételünk következő általánosítását:

*Egy  $C_4^2$  negyedrendű másodfajú görbe minden olyan birationalis transformatiója, a mely a görbét egy szintén negyedrendű másodfajú  $\Gamma_4^2$  görbébe viszi át, CREMONA-féle quadratikusan transformatio.*

Legyen ugyanis a  $C_4^2$ , illetőleg  $\Gamma_4^2$  görbe egyenlete

$$f(x, y, z) = 0 \text{ illetőleg } \varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad (4)$$



és az a  $T$  birationalis transformatio, a mely a  $C_4^2$ -t  $\Gamma_4^2$ -be viszi át:

$$\frac{\xi}{X(x, y, z)} = \frac{\eta}{Y(x, y, z)} = \frac{\zeta}{Z(x, y, z)}, \quad (5)$$

a  $T$  transformatió inverse:  $T^{-1}$  pedig legyen

$$\frac{x}{X(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{y}{Y(\xi, \eta, \zeta)} = \frac{z}{Z(\xi, \eta, \zeta)}. \quad (6)$$

Ezekben a transformatio-egyenletekben  $X, Y, Z$   $x, y, z$ -nek ugyanolyan rendű oly homogén formái, melyeknek közös osztója nincs. Hasonló áll a  $X, Y, Z$ -ra nézve is.

Jelöljük azt a négy-négy pontot, a melyben a  $\xi = 0, \eta = 0$ , illetőleg  $\zeta = 0$  egyenes a  $\Gamma_4^2$  görbét metszi  $A_1 A_2 A_3 A_4, B_1 B_2 B_3 B_4$ , illetőleg  $J_1 J_2 J_3 J_4$ -gyel. Azon négy pontot, a mely ezeknek a  $T^{-1}$  transformatiónál fogva a  $C_4^2$ -n megfelel, jelöljük megfelelően  $A, B, D$ -vel és megfelelő indexekkel.

Vezessünk az  $A_1 A_2 A_3 A_4$  pontokon és a  $C_4^2$  görbe  $O$  kettőspontján keresztül egy kúpszeletet, a melynek egyenlete legyen

$$X_1(x, y, z) = 0.$$

Hasonlóan

$$Y_1(x, y, z) = 0,$$

$$Z_1(x, y, z) = 0$$

legyen azon kúpszelet egyenlete, a mely az  $O$ -n és a  $B_1 B_2 B_3 B_4$ , illetőleg  $D_1 D_2 D_3 D_4$  pontokon megy keresztül.

A  $\Gamma_4^2$  görbéből a sík összes egyenesei egy lineáris teljes  $g_4^2$  pontsorozatot metszenek ki, a neki a  $C_4^2$ -n megfelelő  $\bar{g}_4^2$  pontsorozat szintén teljes és lineáris, minthogy a pontsorozatot egyetlen pontcsoportja meghatározza.

Ebből pedig következik, hogy a  $\bar{g}_4^2$ -t ki lehet metszeni egy adjungált kúpszelet-hálózattal és így a  $X_1, Y_1, Z_1$  kúpszeletek a  $C_4^2$ -görbét az  $A, B, D$  pontcsoportokon és  $O$ -n kívül ugyanabban az  $E_1$  és  $E_2$  pontokban metszik.

Alkossuk meg az  $x, y, z$  homogén változók



$$a = \frac{X \cdot Y_1}{X_1 \cdot Y}$$

függvényét. Ez az  $a$  függvény a  $C_4^2$  görbe egyetlen pontjában sem tűnhetik el, mert a mely pontban az  $a$  számlálója eltűnik, ott a nevezője is ugyanolyan rendben tűnik el s így a hányados véges marad. Ennélfogva, egy már idézett tétel szerint az  $a$  függvény konstans.

Hasonlóan konstans az

$$\frac{XZ_1}{ZX_1} = b, \quad \frac{YZ_1}{ZY_1} = c.$$

A  $X, Y, Z$  konstansainak helyes megválasztásával az  $a, b, c$  konstansok egységgel egyenlőkbe tehetők. Ily választás után írhatjuk, hogy

$$\frac{x_1}{x} = \frac{y_1}{y} = \frac{z_1}{z},$$

vagyis az (5) transformatio identikus a

$$\frac{\xi}{X_1(x, y, z)} = \frac{\eta}{Y_1(x, y, z)} = \frac{\zeta}{Z_1(x, y, z)}$$

quadraticus CREMONA transformatióval.

Vizsgáljuk részletesebben ezt a CREMONA-féle transformatiót.

Egy quadraticus CREMONA-féle transformatióban, miként ismeretes,<sup>1</sup> egy oly egyenesnek, mely a transformatio egy alappontján megy keresztül, egy széteső kúpszelet felel meg, melynek egyik egyenese az invers transformatiónak megfelelő alappontján megy át, a másik egyenese pedig a másik két alapponton átmenő fix egyenes.

Ennek a tételnek alapján az  $O$  kettősponton keresztülmenő egyeneseknek oly egyenesek felelnek meg (a  $T^{-1}$  két alappontján keresztülmenő alapegyenesen kívül), a melyek keresztül-

<sup>1</sup> L. pl. H. WIELEITNER: Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. Samml. Schubert. (1905) p. 138.



mennek a  $T^{-1}$  transformatio megfelelő alappontján. Ezek az egyenesek két változó pontban metszik a  $\Gamma_4^2$  görbét, mivel az  $O$ -n keresztülmenő egyenesek is két változó pontban metszették a  $C_4^2$  görbét. Vagyis az  $O$  kettőspontnak megfelel a  $\Gamma_4^2$  görbe  $\mathcal{Q}$  kettőspontja, mint a  $T^{-1}$  transformatió alappontja.

Hasonlóképp az  $E_1$  és  $E_2$  alappontokon átmenő sugársorok-rak az  $\mathcal{Q}E_3$ , illetőleg  $\mathcal{Q}E_1$  alapegyeneseken kívül oly sugársorok felelnek meg, melyek centruma a  $E_1$ , illetőleg  $E_2$  alappont.

*Az a birationalis transformatio tehát, a mely egy  $C_4^2$  görbét egy  $\Gamma_4^2$  görbébe visz át, a két kettőspontból kiinduló sugársor sugarai között projektív vonatkozást létesít.<sup>1</sup>*

A  $C_4^2$  kettőspontjából kiinduló érintőnek e projektivitás szerint a  $\Gamma_4^2$  görbe kettőspontjából kiinduló érintő felel meg, mivel csak a kettőspontból kiinduló érintők metszik a görbét a kettősponton kívül két összeeső pontban.

Ebből pedig következik, hogy két  $C_4^2$  és  $\Gamma_4^2$  görbe között csak akkor lehet birationalis correspondentia, ha a két görbén a kettőspontból kiinduló 6 érintő projektív.

Ez a feltétel nemcsak szükséges, hanem elégséges is, vagyis ha két  $C_4^2$  és  $\Gamma_4^2$  görbe kettőspontjából kiinduló hat érintő projektív, akkor a két görbe birationalis transformatióval egymásba vihető át.

Ha ilyen birationalis transformatio létezik, az kimutatott tételeink szerint quadratikusan és a  $C_4^2$  görbe  $O$  kettőspontjából kiinduló 6 érintő  $T_1, T_2, \dots, T_6$  érintéspontját a  $\Gamma_4^2$  görbe  $\mathcal{Q}$  kettőspontjából a görbéhez húzható 6, (főltételeink szerint az előbbi 6 sugárral projektív) érintő  $T_1, T_2, \dots, T_6$  érintéspontjába viszi át. A  $C_4^2$  görbe egy tetszőleges  $P$  pontjának megfelelő pont a  $\Gamma_4^2$  görbén az a  $H_1$  vagy  $H_2$  pont, a melyben az  $OP$  sugárnak megfelelő  $\mathcal{Q}$ -n keresztülmenő sugár a  $\Gamma_4^2$  görbét metszi.

<sup>1</sup> A fönti tételt a quadratikusan transformatiók ismerete nélkül is kimutathattuk volna, az  $(n-3)$ -adrendű adjungált, ú. n. « $g$ -görbék» transformatiójáról szóló tételek segítségével.



A  $T_k, \mathbf{T}_k$  ( $k=1, 2, \dots, 6$ ) és a  $P, \Pi_1$  mint hét megfelelő pontpár meghatároz két quadratikus transformatiót,<sup>1</sup> melyek egymás inversei. E két transformatióban  $O$  és  $\Omega$  két megfelelő alappont, mivel belőlük a 7 megfelelő pont projektív sugársorral projiciálható.

Az így meghatározott quadratikus transformatio a  $C_4^2$  görbét egy olyan  $\bar{\Gamma}_4^2$  görbébe viszi át, melynek kettőspontja  $\Omega$ -ba esik és a  $T_1, T_2, \dots, T_6$  és  $\Pi_1$  pontokon keresztül megy. A  $\bar{\Gamma}_4^2$  és  $\Gamma_4^2$  görbe összeesik, mert a kettősponton kívül a  $\mathbf{T}$  pontokban egymást érintik és a  $\Pi_1$  pontban közös pontjuk van, tehát összesen a kettősponton kívül 13 közös pontjuk van. Egy  $C_4^2$  (1) alatti előállításából következik, hogy a kettősponton kívül 11 pont meghatározza a görbét. Ezért a meghatározott két transformatiónk a  $C_4^2$  és  $\Gamma_4^2$  görbéket egymásba viszi át.

Mivel a  $P$  pont megfelelő pontjaként a  $\Pi_2$ -t is tekinthetjük volna, ezért a  $C_4^2$  és  $\Gamma_4^2$  görbék pontjai között két különböző birationalis correspondentia van.

Ezek alapján kimondhatjuk a következő tételt:

*Legyen  $C_4^2$  és  $\Gamma_4^2$  két negyedrendű másodfajú görbe, melynek  $O$ , illetőleg  $\Omega$  kettőspontjából a megfelelő görbéhez húzható érintők érintéspontjai legyenek  $T_1, T_2, \dots, T_6$ , illetőleg  $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_6$ ; legyenek továbbá az*

$$O(T_1, T_2, \dots, T_6) \text{ és } \Omega(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_6) \quad (7)$$

*sugársorok projektívek, akkor a két görbe síkjának pontjai között két olyan teljesen meghatározott (quadratikus) birationalis correspondentia létezik, melyben  $T_k$  és  $\mathbf{T}_k$  ( $k=1, 2, \dots, 6$ ) megfelelő pontok.*

Ebből a tételből következik, hogy egy  $C_4^2$  görbének három abszolút invariánsa van, a melyek a (7) alatti 6 sugár közül három kiválasztottra vonatkozólag a másik három kettősarány-számait adják.

Minthogy a (7) alatt feltételezett projektivitáson kívül a

<sup>1</sup> L. K. DOEHLEMAN, i. h. p. 27—29.



6—6 sugár között más projektivitás általában nem lehetséges, azért két  $C_4^2$  és  $\Gamma_4^2$  görbe között csak két birationalis correspondentia lehetséges.

Abban az esetben, ha a (7) projektivitás a második sugársor sugarainak más sorrendjében is fennáll, akkor az említett két birationalis correspondentián kívül más birationalis correspondentia is fennállhat. Ez az eset csak akkor fordulhat elő, ha az absolut invariantsok különleges, singuláris értékeket vesznek föl. Azért az ilyen birationalis correspondentiákat singuláris correspondentiáknak nevezzük.

Legutóbbi tételeink akkor is érvényesek, ha a  $\Gamma_4^2$  görbe a  $C_4^2$  görbével összeesik. Ekkor a  $C_4^2$  görbe önmagába való transformatióiról van szó. A  $C_4^2$  görbe két önmagába való transformatiója közül az egyik a már említett inversió, a másik pedig két ilyen inversió egymásután alkalmazása, az identikus transformatió, a mely minden pontnak önmagát rendeli megfelelőül.

Egy  $C_4^2$  görbének egy  $\Gamma_4^2$  görbébe való összes birationalis correspondentiáit előállíthatjuk, mint a  $C_4^2$  görbének önmagába való összes birationalis transformatióinak és egy olyan birationalis transformatiónak összetételét, a mely a  $C_4^2$  görbét a  $\Gamma_4^2$  görbébe viszi át.

Két  $C_4^2$  és  $\Gamma_4^2$  görbe pontjai között fennálló singularis birationalis correspondentiák vizsgálata helyett tehát elégséges egy  $C_4^2$  önmagába való singularis correspondentiáit vizsgálni.

Ezeknek a singularis birationalis correspondentiáknak vizsgálata arra a feladatra vezethető vissza, megállapítani, hogy egy sugársor 6 sugarát különböző sorrendben mikor és hányféleképp lehet projektívnek tekinteni. Algebrailag a feladat olyan hatodrendű binárformák vizsgálatára vezet, a melyeknek önmagukba való linearis substitutioik vannak. A feladatot az irodalomban O. BOLZA <sup>1</sup> vizsgálta részletesebben.

<sup>1</sup> American Journal of Math. X. köt. p. 47—70, kivonatban megjelent a Math. Ann. 30. kötetében, p. 1—7.

Lásd még A. WIMAN értekezését, Stockholm Bihang 21. (1895) Nr. 3.



4. Egy reális  $C_4^2$  görbének kettőspontja, minthogy egyedüli kettőspont, mindig valós és pedig közönséges kettőspont, ha érintői valósak és különbözők; csúcspont, ha érintői összeesnek és izolált pont, ha érintői képzetesek.

Egy reális  $C_4^2$  görbe több különálló görbemenetből állhat és pedig reális menetei számának maximuma, miként ismeretes,<sup>1</sup> 3-mal egyenlő. A  $C_4^2$  görbe menetei között vagy egyáltalában nincsen páratlan menet, vagy pedig két páratlan menet van, mert a görbe rendszáma páros.<sup>2</sup>

Minthogy két görbemenet, melyek közül legalább egyik páros, mindig páros, két páratlan görbemenet mindig páratlan számú pontban metszi egymást, azért egy reális  $C_4^2$  nem izolált kettőspontjában vagy egyetlen menet metszi önmagát, vagy két páratlan menet metszi egymást. Más esetben ugyanis több kettőspont keletkeznék.

Ezek szerint tehát reális görbemeneteket tekintve a  $C_4^2$ -knél a következő öt eset lehetséges:

1. Három valós menet, melyek közül vagy mind a három páros, vagy egy páros és kettő páratlan.
2. Izolált pont és két páros menet.
3. Két menet, mindkettő páros vagy mindkettő páratlan.
4. Izolált pont és egy páros menet.
5. Egy páros menet.

Mielőtt az egyes esetekben a menetek relativ elhelyezkedését részletesebben vizsgálónk, kimutatjuk a következő tételt:

*A kettőspontból egy görbemenethez húzható reális érintők száma 0, vagy 2.*

A kettőspontból kiinduló  $e$  egyenes egy görbemenetet vagy null vagy két reális pontban metsz. Legyen  $e_0$  az  $e$  egyenes egy olyan helyzete, a melyben a görbemenetet 2 reális pontban

<sup>1</sup> Egy  $p$ -edfajú algebrai görbe reális menetei számának maximuma  $p+1$ .  
L. A. HARNACK: Math. Ann. Bd. 10. p. 188—198.

<sup>2</sup> Páros és páratlan görbemenetek értelmezése v. STAUDT-tól származik; Geometrie der Lage, Nürnberg, 1847, 12. §.



metszi. Forgassuk az  $e$  egyenest az  $e_0$  helyzetből kiindulólág a kettőspont körül  $\pi$  szöggel. Ezalatt az  $e$  egyenes leírja az egész síkot. Az  $e$  egyenesnek a görbemenettel való reális metszéspontjainak száma akkor és csak akkor változik meg, ha az  $e$  egyenes a görbemenet egy érintőjén keresztülhalad, ekkor a reális metszéspontok számának változása 2. Minthogy egy félfordulat megtétele után a reális metszéspontok száma ugyanaz marad, ennél fogva az  $e$  egyenesnek páros számszor kellett érintőn áthaladnia.<sup>1</sup>

Minthogy egy görbemenetet egy  $e$  egyenes legfeljebb két pontban metsz, azért ha az  $e$  egyenes egy metsző helyzetből kiindulva egy érintőn keresztül halad, a reális metszéspontok száma a kettősponton kívül null lesz. Ebből következik, hogy a görbemenet két szomszédos érintőjének csak egy szögterében helyezkedik el, a csúcsszögtérbe csak akkor nyúlhatik át, ha a kettőspont a görbemeneten helyezkedik el. Ezzel kimondott tételünket igazoltuk.

A kettőspontból tehát egy görbemenethez két reális érintőt lehet húzni, ha a kettősponton keresztülmenő legalább egy olyan egyenes, mely kivülről a görbemenetet nem metszi más reális pontban; ha ez nem lehetséges, akkor a kettőspontból a görbemenethez nem húzható reális érintő.

Nevezzük könnyebb kifejezhetés végett a nem izolált kettőspont

<sup>1</sup> Legyen  $C$  egy tetszőleges görbe, melynek nincs határpontja, vagyis olyan pontja, melynek csak egyik irányban vannak szomszédos pontjai, tételezzük föl továbbá erről a görbéről, hogy minden egyenes véges számú pontban metszi. Nevezzük a sík vagy a görbe egy tetszőleges  $P$  pontjából a görbéhez húzható érintőnek az olyan  $P$ -n keresztülmenő egyenest, melyet  $P$  körül jobb és baloldalra kissé kiforgatva a nyert 2 egyenesnek  $C$ -vel való reális metszéspontjainak száma 2-vel különbözik egymástól. Ha a különbség  $2n$ , akkor számítsuk azt az egyenest  $n$ -szeres érintőnek. Akkor a szövegben alkalmazott gondolatmenettel kimutathatjuk, hogy egy pontból a  $C$  görbéhez húzható érintők száma, ha véges, páros.

Az érintőnek most adott definíciója nem esik össze a közönséges definícióval, a mennyiben definíciónk szerint érintő lehet egy csúc bizonyos helyzeténél a  $P$ -n és a csúcsponton keresztülmenő egyenes, viszont az inflexiós érintők definíciónk szerint nem számítanak érintőnek.



pontot *elsőfajúnak*, ha belőle ahhoz a görbemenethez, a melyen fekszik, lehet reális érintőt húzni; ellenkező esetben nevezzük *másodfajúnak*.

Ezt az elnevezést használva, könnyen be lehet látni, hogy másodfajú kettőspont csak oly  $C_4^2$  görbénél léphet föl, amelynek az a menete, melyen a másodfajú kettőspont fekszik, egyetlen reális menete. Minden más esetben lehetne ugyanis a kettősponton oly egyenest húzni, mely a görbét a kettősponton kívül kettőnél több pontban metszené.

Hasonló ok miatt nem lehetséges, hogy egy  $C_4^2$  egyik páros menete egy másikat teljesen magában foglalja, legfeljebb az az eset fordulhat elő, hogy egy görbemenet az izolált kettőspontot foglalja magában. Ebben az utóbbi esetben azon a görbemeneten kívül más görbemenet nem lehetséges.

Ezek alapján a felsorolt öt esetre vonatkozólag következőket állíthatjuk:

Másodfajú kettőspont csak az 5. esetben fordulhat elő. Két páros menet közül egyik nem foglalhatja belsejében a másikat. Izolált pont csak a 4. esetben lehet egy görbemenet belsejében.

A kettőspontból kiinduló reális érintők számának összefüggését a görbemenetekkel és a kettőspontokkal a következőkép foglalhatjuk össze:

I. 6 reális érintő csak az 1. esetben lehetséges.

II. 4 reális érintő csak a 2. és 3. esetben fordulhat és fordul elő.

III. 2 reális érintő előfordul a 4. esetben, ha az izolált pont a görbemeneten kívül fordul elő és az 5. esetben, ha a kettőspont elsőfajú.

IV. 0 reális érintő van a 4. esetben, ha az izolált pont a páros menet belsejében van és az 5. esetben, ha a kettőspont másodfajú.

Nem nehéz közvetlenül fölírni oly  $C_4^2$  görbék egyenleteit, melyek a kívánt típusú görbéket állítják elő.

Leszámítva a másodfajú kettősponttal bíró  $C_4^2$  görbét, a kívánt típusú görbék egyenletének előállítására

$$f(x, y, z) = f_2(x, y) \cdot z^2 \pm f_4(x, y) = 0 \quad (8)$$

alakú egyenleteket fogunk alkalmazni, tehát oly  $C_4^2$  görbéket alkalmazunk, a melyeknél a kettőspont mindkét érintője inflexiós érintő. Ekkor az

$$f_2(x, y) \cdot f_4(x, y) = 0$$

egyenlet állítja elő a kettőspontból kiinduló hat érintő egyenletét.

Ilyen  $C_4^2$  görbe egy menetje akkor páros, ha az  $O$ -ból kiinduló mindkét érintője vagy az  $f_2(x, y) = 0$  két egyenese, vagy pedig az  $f_4(x, y) = 0$  egyenlet által előállított négy egyenes közül kettő. Ebben a két esetben ugyanis  $O$  a görbemenetnek vagy kettőspontja, vagy pedig nem is pontja s ennél fogva minden  $O$ -n keresztülmenő egyenes a görbemenetet párosszámú pontban metszi s így a menet páros. Ellenben páratlan a görbemenet, ha egyik  $O$ -ból kiinduló érintője az  $f_2(x, y) = 0$ , a másik az  $f_4(x, y) = 0$  egyenletek által előállított egyenesekhez tartozik, mert ekkor  $O$  a görbemenet egyszerű pontja lévén, minden  $O$ -n keresztülmenő egyenes a görbemenetet ( $O$ -t is beleszámítva) 3, vagy 1 reális pontban metszi.

Legyen

$$e_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 6)$$

az  $O$ -n keresztülmenő 6 egymástól különböző egyenes egyenlete, melyek vagy mind reálisok, vagy pedig közülök 1, 2 vagy mind a 3 pár konjugált komplex koefficiensekkel birjon, akkor a (8) alatti egyenleteket következőkép is írhatjuk:

$$e_1 \cdot e_2 - e_3 e_4 e_5 e_6 = 0 \text{ és } e_1 e_2 + e_3 e_4 e_5 e_6 = 0. \quad (9)$$

Ezen két egyenlettel előállított  $C_4^2$  görbe alakja csak az  $e$  egyenesek realitásától és elhelyezkedésétől függ.

I. Ha az  $O$  sugársorban mind a hat  $e$  egyenes reális és sorrendjük bizonyos forgási irány szerint  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ , akkor



a (9) alatti két egyenlet két oly  $C_4^2$  görbét állít elő, melyeknek három görbemenetjük van; az egyiknek mind a három menete páros, a másiknak egy menete páros, a másik kettő pedig páratlan. Következik pedig ez abból, hogy az egyik görbének éppen azon szögterekben vannak reális pontjai, a melyekben a másiknak nincsenek reális pontjai és megfordítva, és így  $e_1, e_2$  az egyik görbénél egy menetnek, a másiknál két különböző menetnek lévén érintői, az egyik görbének 3 páros, a másiknak csak 1 páros és 2 páratlan menete van.

II. Ha az  $e_1, e_2$  konjugált komplex egyenespár s a többi négy egyenes reális, akkor a (9) egyenletek bármelyike oly  $C_4^2$  görbét állít elő, melynek egy izolált kettőspontja és két páros menete van.

Ha ellenben az  $e_5, e_6$  konjugált komplex egyenespár és a többi négy reális  $e$  egyenes sorrendje:  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , akkor a I. alatt mondottak értelmében a (9) egyenletek egyike két páros, másika két páratlan menettel bíró  $C_4^2$  görbét állít elő.

III. Ha  $e_1, e_2$  és  $e_3, e_4$  konjugált komplex egyenespár, ellenben  $e_5, e_6$  reális, akkor a (9) alatti egyenletek bármelyike egy izolált kettősponttal és egy páros menettel bíró  $C_4^2$  görbe egyenlete.

Ha ellenben csak  $e_1, e_2$  egyenespár reális, akkor a (9) egyenletek bármelyike egy páros menettel bíró görbét állít elő.

IV. Ha  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$  3 konjugált komplex egyenespár, akkor a (9) egyenletek közül az első oly  $C_4^2$  görbét állít elő, melynek egy páros menete és egy izolált pontja van, a mely azonban az előbbi pontban mondott esettel ellentétben nem a páros meneten kívül, hanem azon belül fekszik. A (9) egyenletek közül a második nem állít elő reális  $C_4^2$  görbét.

Egy másodfajú kettősponttal bíró  $C_4^2$  görbét nem lehet (9) alakú egyenlettel előállítani, mert annál a kettőspont érintői nem lehetnek inflexiók érintők.

Ennélfogva ilyen  $C_4^2$  görbét

$$f_2(x, y)z^2 + 2f_3(x, y) \cdot z - \lambda f_4(x, y) = 0$$

alakú egyenlettel lehet előállítanunk, melynél  $f_2 = e_1 \cdot e_2 = 0$  két



reális egyenest állít elő,  $\lambda$  pedig egy valós számot jelent. Csak úgy kell  $f_2, f_3, f_4$ -et és  $\lambda$ -t megválasztanunk, hogy az

$$f_3^2 + \lambda f_2 f_4 = 0$$

lineáris tényezői mind képzetesek és egymástól különbözők legyenek, a mi, ha  $\lambda$  elegendő kicsiny, mindig lehetséges.

Így pl. adjunk  $\lambda$ -nak határozott előjelet és válasszunk  $f_3$  két lineáris tényezőjét és  $f_4$  két pár lineáris tényezőjét konjugált komplexnek. Az  $f_3$  harmadik reális egyenesét válasszunk úgy, hogy az az  $e_1, e_2$  egyenespár azon szögterén menjen keresztül, a melyikben  $\lambda f_2 f_4$  pozitív. Akkor a másik szögterben és annak határán  $O$  kivételével  $f_3^2$  határozottan pozitív, míg  $\lambda f_2 f_4$  a szögter határán null s azon belül pedig negatív.  $\lambda$ -t meg lehet választani oly kicsinynek, hogy az  $f_3^2 + \lambda f_2 f_4$  ebben a szögterben is pozitív legyen. Ekkor az  $f_3^2 + \lambda f_2 f_4 = 0$  összes lineáris tényezői mind képzetesek s  $\lambda$ -nak nem speciális megválasztása mellett egymástól különbözők is.

Meg akarjuk jegyezni, hogy az 1. és 3. két alete, a mikor két páros menet helyett két páratlan menet fordul elő, egymástól lényegében nem különbözik, mert egy oly quadratikusan transformatio, a melynek a kettősponton kívüli másik két alappontja két különböző páros párosmeneten fekszik, azt a két párosmenetet két páratlan menetbe transzformálja, míg az esetleg előforduló harmadik páros menet a transformatio után is megmarad párosnak.

Az alappontokon átmenő kúpszeleteknek u. i. a transformatio miatt egyenesek felelnek meg. Minthogy egy az alappontokon keresztülmenő tetszőleges kúpszelet azt a párosmenetet, a melyen egy alappont fekszik, ezenkívül páratlan számú pontban metszi, azért annak a páros menetnek a transformatio folytán páratlan görbemenet felel meg, mert egy tetszőszerinti egyenes páratlan számú pontban metszi. Ellenben egy oly páros menetnek, melyen nincs alappont (a kettőspontot kivéve), páros menet felel meg.

Sz. Nagy Gyula.



# MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI

E folyóirat évenként 8, legalább három fnyi füzetben jelenik meg, a nyári hónapok kivételével, a hó második felében.

## LAPOK

Előfizetési díj egy évre 10 K.  
A Matematikai és Physikai Társulat tagjai a folyóiratot tagságdíjuk fejében kapják.

26. évfolyam.

1917. június—október.

6. füzet.

### A KOMPLIKÁLT TYPUSÚ ZEEMANN-EFFEKTUSRA VONATKOZÓ ÚJABB KISÉRLETI ÉS ELMÉLETI VIZSGÁLATOKRÓL.

A következőkben egyrészt a komplikált típusú ZEEMANN-effektusra vonatkozó, azokkal az újabb kísérleti vizsgálatokkal akarok foglalkozni, melyek PASCHEN és BACK<sup>1</sup> neveihez fűződnek, másrészt beszámolok W. VOIGT<sup>2</sup> evvel összefüggő elméleti vizsgálódásairól és azok legújabb eredményeiről.

1. Miként ismeretes, a ZEEMANN-effektusra vonatkozó kísérleti vizsgálatok arra az eredményre jutottak, hogy a spektrálvonalak zöme mágneses térben komplikált típusú felbontást ad és csak aránylag nagyon kevés spektrálvonal, az egyes vonalakból álló seriesek vonalai, mutatják mágneses térben az úgynevezett ZEEMANN-féle normális tripletet. A komplikált típusú ZEEMANN-féle felbontásokra vonatkozó gazdag kísérleti anyag nagy változatosságába és sokszerűségébe két empirikus törvény hoz némi szabályosságot, a PRESTON-féle törvény és az úgynevezett RUNGE-féle szabály. A PRESTON-féle törvény a seriesvonalak ZEEMANN-effektusának típusairól szólva azt mondja, hogy egy seriesbe tartozó vonalak ugyanazon típusú ZEEMANN-effektust adnak mágneses térben és ugyanazon típusú felbon-

<sup>1</sup> F. PASCHEN u. E. BACK: Ann. d. Phys. Bd. 39. S. 897. Bd. 40. S. 960. és R. FORTRAT: Compt. rend. 156. 636. l. és 157. 1607. l.

<sup>2</sup> W. VOIGT: Ann. d. Phys. Bd. 43. S. 1137., Bd. 42. S. 210., Bd. 41. 403., Bd. 40. S. 368., Bd. 36. S. 873., Bd. 24. S. 193.

W. VOIGT u. H. M. HANSEN: Phys. Zeitschrift. Bd. 13. S. 217.



tást adnak a rokonelemek egymásnak megfelelő seriesbe tartozó vonalai is.

Például a nátrium összes vonalai, melyek a dubletseriesbe tartoznak, úgy bomlanak fel mágneses térben, hogy  $D_1$ -ből egy quadruplet,  $D_2$ -ből pedig sextuplet lesz. De ugyanily típusú felbontást adnak a rokon ezüst, réz, thallium megfelelő dublet-seriesébe tartozó vonalak is.

A RUNGE-féle szabály azt mondja, hogy a komplikált típusú felbontásoknál a komponensek távolsága a mágneses tér nélküli vonal helyétől  $\frac{n}{m}\mu_n$ , a hol  $n$  és  $m$  kicsiny egészs számok,  $\mu_n$  pedig az úgynevezett normális felbontás nagysága frekvenciákban mérve, tehát a közönséges triplet szélső komponenseinek távolsága az eredeti, tértőlküli vonal helyétől.  $\mu_n = \frac{R_o}{2c} \cdot \frac{e}{m}$ .  $R_o$  a mágneses tér intenzitása,  $c$  a fénysebesség,  $\frac{e}{m}$  pedig az elektron töltésének és tömegének viszonya.

A komplikált típusú felbontásokra vonatkozó ezeket az általános jellegű ismereteinket jelentős mértékben gyarapították PASCHEN és BACK vizsgálatai. PASCHEN és BACK, hogy egy konkrét példát említsünk, megvizsgálták az  $O$  triplet-seriesé 394.7  $\mu\mu$ -nél fekvő 3 vonalának ZEEMANN-effektusát. A tértőlküli triplet 3 vonala mágneses térben 18 komponensre ugrik szét. A következőkben kicsinynek vagy nagynak nevezzük a mágneses teret, a szerint, a mint a mágneses komponensek távolsága a tértőlküli vonal helyétől jóval kisebb vagy nagyobb, mint a tértőlküli triplet komponenseinek egymástól való távolsága.

Kicsiny mágneses terekben tehát a 18 mágneses komponens egy bizonyos konfigurációt mutatott, melyben a mágneses vonalak távolsága a tértőlküli vonal helyétől arányos volt a mágneses tér intenzitásával. A térerősség növelésével azután, mikor a tértőlküli triplet egyik vonalának mágneses komponensei elérték a tértőlküli triplet másik vonalát, megváltozott a konfiguráció, még pedig úgy a mágneses komponensek geometriai



elrendeződése, mint azok intenzitásbeli viszonyai. Egyes vonalak erősebben távolodtak a térnélküli vonal helyétől, mások viszont alig; egyesek intenzitása növekedett, mások szinte eltűntek és az egész átalakulás tendenciája a szimmetrikus normális triplet volt, melyre a fenti értelemben vett *nagy* mágneses terekben a 18 vonal tényleg össze is húzódott. Ugyanezt észlelték a  $H_e$  587.5  $\mu\mu$ -nél, 471.3  $\mu\mu$ -nél, 438.8  $\mu\mu$ -nél fekvő kettős (satellites) vonalain, továbbá a  $H\beta$ ,  $Ha$ ,  $H\gamma$  vonalakon és a  $Ka$ ,  $Na$ , és  $Li$  néhány vonalán.

Szóval elegendő erős mágneses térben minden komplikált típusú felbontásból normális triplet lesz. Ez a PASCHEN és BACK-féle effektus. Az így keletkező triplet normális, nemcsak a szélső komponenseknek a középsőtől való távolságát illetőleg, hanem a komponensek polározási állapotának szempontjából is. A triplet kialakulására jellemző, hogy előbb, azaz már kisebb mágneses terekben kifejlődik a középső komponens, mely az erővonalakra merőlegesen van polározva, mint a triplet két szélső komponense. Itt megemlítendő az az igen érdekes mód, a hogyan PASCHEN és BACK saját észleléseiket interpretálják. Szerintük az elektron normális állapotában egyes vonalakkal álló series emittál.

Ha kivételkép dublet- vagy tripletseries emittál, akkor egy kényszer hat rá, mely kényszer eredményezi egyszersmind mágneses térben a komplikált típusú felbontást is a közönséges ZEEMANN-féle normális triplet helyett. Ez a kényszer, vizsgálataik szerint igen nagy mágneses terek segítségével megszüntethető, mikor is a komplikált felbontásból normális triplet lesz.

Ezen felfogásuk támogatására, mint karakterisztikus példát említik a  $Na$  285.2  $\mu\mu$ -nél fekvő dubletjét, melynek két vonala oly közel van egymáshoz, hogy alig választhatók külön. Itt tehát a kényszer nagyon kicsiny volna. Ez a vonal azonban egyszersmind kivétel a PRESTON-féle törvény alól is, a mennyiben annak ellenére, hogy a  $Na$  dublet seriesébe tartozik, már kicsiny mágneses térben is nem egy  $D$ -típusú felbontást mutat, hanem normális tripletet. Itt tehát nem volt szükség nagy



mágneses terekre a kényszer megszüntetéséhez, minthogy az amúgy is csekély volt.

Egy további példa ily viselkedésre a rokon *Li* ZEEMANN által észlelt  $670.8 \mu\mu$ -nél levő vörös dubletje. Szerintük tehát nem a  $285.2 \mu\mu$ -s *Na*-vonal kivétel a PRESTON-féle törvény alól, hanem épen megfordítva, kivétel az egész dublet-series, mert az elektron normálisan egyes-vonalakból álló series-t emittál. PASCHEN és BACK ezen felfedezései természetszerűleg egész új világításba helyezik a PRESTON-féle törvényt és RUNGE szabályát, a mennyiben mindkettő értelmét és érvényességét kicsiny mágneses terekre korlátozzák.

2. Előrebocsátva itt, hogy VOIGTNak a komplikált típusú ZEEMANN-féle felbontásokra vonatkozó elmélete természeténél fogva ép oly kevésbé tudja a PRESTON-féle törvényt elméletileg indokolni, mint a hogy az egyszerű triplet LORENTZ- vagy VOIGT-féle elmélete sem tudta, megemlítendő, hogy újabb időben az ily irányú törekvéseket más úton jelentős siker koronázta. P. DEBYE<sup>1</sup> ugyanis megvizsgálta a BOHR-féle atom-mintának frekvencia-lehetőségeit mágneses térben. Ez az atom-minta mágneses térnélküli állapotában tudvalevőleg a hidrogen serieseinek vonalait emittálja. DEBYE számításai azzal az eredménynyel jártak, hogy mágneses térben minden térnélküli frekvencia három frekvenciára bomlik szét, tehát a hidrogen serieseinek minden vonala, a felbontás nagyságának szempontjából is normális tripletet ad mágneses térben. Ez az elméleti eredmény kitűnő egyezésben van a tapasztalattal és ebben a DEBYE féle elméletben szervesen egybekapcsolódik a series-formula és a ZEEMANN-effektus elmélete. DEBYE ez elméletének azonban, szemben a ZEEMANN-effektus LORENTZ- és VOIGT-féle elméleteivel, kétségtelen hátránya az, hogy DEBYENél semminemű felvilágosítást nem kapunk a mágneses komponensek polárizációs állapotára vonatkozólag. Ennek oka abban van, hogy a BOHR-féle

<sup>1</sup> P. DEBYE: Göttinger Nachrichten, 1916.



atom-mintában az emisszió tulajdonképeni mechanizmusát ez-ideig még homály fedi.<sup>1</sup>

3. VOIGTNAK a komplikált ZEEMANN-effektusokra vonatkozó elmélete alapvonásaiban már régebbi keletű.<sup>2</sup> Újabb és részletes kifejtéséhez nagy lendületet adott egyrészt a PASCHEN-BACK-effektus felfedezése, a mi az elméletben fellépő paraméterek számának lényeges redukciójához vezetett, másrészt pedig a komplikált típusú felbontások kicsiny és közepes mágneses terekben való részletes tanulmányozása, a mi által lehetővé vált a megmaradó paraméterek numerikus meghatározása és az elméletnek konkrét példákon a tapasztalattal való összehasonlítása.

A komplikált típusú ZEEMANN-effektusok VOIGT-féle elmélete is az invers effektusok, vagyis az abszorpciós ZEEMANN-effektusok elmélete. VOIGT előszeretettel az abszorpciós-effektushoz fűzi tárgyalásait, még pedig több okból: 1. az abszorpciós-effektusok elmélete, szemben az emissziós-elmélettel, mely mindig csak egy emittáló centrummal dolgozik, ab ovo számításba veszi a különböző elektronok (emisszió- és abszorpció-centrumok) kölcsönhatását és így jobb megközelítése a valóságnak, mint az emisszió-elmélet. 2. Az abszorpciós effektusok elmélete nemcsak a mágneses felbontás komponenseinek geometriai elhelyeződéséről és polározási viszonyairól ad felvilágosítást, mint például a LORENTZ-féle emissziós elmélet, hanem azok intenzitásbeli viszonyairól is, a melyek épen a komplikált felbontásoknál és a PASCHEN-BACK-effektusnál, mint látni fogjuk, fontos szerepet játszanak. 3. Az abszorpciós effektusok elmélete felöleli az úgynevezett kísérő jelenségek, a FARADAY-effektus, a transverzális mágneses kettős törés stb. gazdag és változatos komplexumát.

<sup>1</sup> Ugyanezen oknál fogva ugyanígy áll a dolog a STARK-effektus EPSTEIN-féle elméleténél is, mely szintén a BOHR-féle atom-mintán alapszik; az elektromos komponensek polározási állapota itt sem tisztázható. Ann. d. Phys. Bd. 50. S. 489.

<sup>2</sup> Lásd, VOIGT: Magnetooptik S. 186.



A komplikált ZEEMANN-effektusok elméletéhez VOIGT úgy jut el, hogy általánosítja az elektron mozgásegyenletét.<sup>1</sup> Az általánosítás úgy értelmezhető, hogy ezáltal több elektron egymással mágnesesen kapcsolva lesz, vagyis az elektron mozgása mágneses térben függni fog a vele kapcsolt többi elektron mozgási állapotától. Az új tagok, melyek az egyszerű elmélet mozgásegyenletében

$$m \frac{dx^2}{dt^2} + kx + h \frac{dx}{dt} - \frac{eR_0}{c} \frac{dy}{dt} = eX$$

( $m$  az elektron tömege,  $e$  a töltése,  $x$  az elongációja,  $k$  a quasi-elasztikus,  $h$  a súrlódási erő,  $X$  a fényhullámban rezgő elektromos erő,  $R_0$  a mágneses tér intenzitása) helyet kapnak, mindnyájan arányosak a mágneses tér intenzitásával; egyébként pedig az általánosítás a következő elvek szerint történik: 1. Hogy a tapasztalással megegyezésben továbbra is lehetséges legyen a rezgések superpozíciója, kell, hogy az általánosító tagok lineárisak legyenek az elektron elongációinak koordinátaiban,  $x_h$ ,  $y_h$  és  $z_h$ -ban és ezek időszerinti diff.-hányadosaiban. 2. A mágneses térerősség az elektronok rezgése alkalmával az új tagok révén se végezzen munkát ép úgy, mint a régi LORENTZ-erő mágneses része sem végez soha munkát, mert mindig merőleges az elmozdulásra. Ehhez az szükséges, hogy az összmunkát képezve, vagyis az  $x_h$ ,  $y_h$ ... elongációknak megfelelő egyenleteket rendre  $\dot{x}_h$ ,  $\dot{y}_h$ ,  $\dot{z}_h$ ...-val szorozva és összeadva az eredményekből az általánosító tagok ép úgy eltűnjenek, mint a LORENTZ-erő mágneses része. Tehát kell, hogy az általánosító tagok speciálisan  $\dot{x}_h$ ,  $\dot{y}_h$ -ben legyenek lineárisak oly megszorítással, hogy  $\dot{x}_k$  faktora az  $x_h$ -nak megfelelő egyenletben ellentétten egyenlő legyen  $\dot{x}_h$  faktorával az  $x_k$ -nak megfelelő egyenletben és így tovább. 3. Az általánosítás meg kell hogy feleljen a mágneses tér forgási szimmetriájának, tehát a mágneses tér irányát koordináta rendszerünk  $z$  tengelyével

<sup>1</sup> Lásd pl. RYBÁR I.: Math. és Phys. Lapok 1916. 130. l. 11. képlet.



párhuzamosan választva, az  $x_h, y_h$  egyenleteknek nem szabad  $z$ -menti  $\dot{z}_h$  sebességét tartalmazni és viszont. Az általánosító tagok fizikai szerepe tehát nem nagyon szemléletes, ezt VOIGT is elősmeri, viszont meggyőződése, hogy konkrét atom-minta segélyével való általánosítás a probléma felesleges specializálását jelenti mindaddig, a míg általános elvek segélyével is boldogulni lehet.

Tegyük most fel, hogy a mágneses tér irányával párhuzamosan, tehát  $\parallel z$ ,  $\nu$  frekvenciájú sík-fényhullám halad át közegünkön, melyben rezgő elektromos erő komponensei legyenek  $X, Y, Z = 0$ .

Tehát egyelőre a longitudinális effektusra szorítkozunk, annak elintézésével azonban egyszersmind elintéztük, legalább a várható frekvenciák szempontjából, a transverzális effektusnak a mágneses erővonalakra merőlegesen rezgő komponenseit is.

Az egymással mágnesesen kapcsolt elektronok mozgásegyenleteinek rendszere mágneses térben a fenti elvek szemmel-tartásával lesz tehát:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + f_{11}\dot{x}_1 + f_{12}\dot{x}_2 + \dots + g_{11}\dot{y}_1 + g_{12}\dot{y}_2 + \dots &= eX \\ m\ddot{x}_2 + k_2 x_2 + f_{21}\dot{x}_1 + f_{22}\dot{x}_2 + \dots + g_{21}\dot{y}_1 + g_{22}\dot{y}_2 + \dots &= eX \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 + k_1 y_1 - g_{11}\dot{x}_1 - g_{12}\dot{x}_2 - \dots + f_{11}\dot{y}_1 + f_{12}\dot{y}_2 + \dots &= eY \\ m\ddot{y}_2 + k_2 y_2 - g_{21}\dot{x}_1 - g_{22}\dot{x}_2 - \dots + f_{21}\dot{y}_1 + f_{22}\dot{y}_2 + \dots &= eY \end{aligned} \quad (2)$$

és még egy harmadik rendszer a  $z_h$ -kra, melyet itt elhagyhatunk.

$f_{ii} = f_i$  az  $i$ -edik elektronra működő csillapodási erő,  $g_{ii} = g_i$  az  $i$ -edik elektronra működő közönséges LORENTZ-erő mágneses része, mely a nem kapcsolt elektronra is működne.

$f_{ik} = -f_{ki}$  az elsőfajú

$g_{ik} = -g_{ki}$  a másodfajú «kapcsolási függvények», melyek valamennyien arányosak a mágneses tér intenzitásával.

Ez megtörténvén, az erőtérrrel párhuzamosan áthaladó hul-



lámra vonatkozólag a közeg komplex törésmutatójának<sup>1</sup>  $n$ -nek a mozgásegyenletekben fellépő parameterekkel való előállítása ugyanúgy történik, mint a közönséges longitudinális dublet esetében. A  $P$  elektromos polarizációt vagy «eltolást» az elektronelméletben definiáló

$$\begin{aligned} P_x &= n^2 X = X + 4\pi Ne \Sigma x_h \\ P_y &= n^2 Y = Y + 4\pi Ne \Sigma y_h \end{aligned} \quad (3)$$

( $N$  az elektroncsoportok száma köbczentiméterenként) egyenletekbe helyettesíteni kell  $x_h, y_h$  azokat az értékeit, melyek az (1) és (2) rendszerek feloldásából nyerhetők.

$x_h$  és  $y_h$  (1) és (2)-ből nyert értékei arányosak lesznek  $X$ -el és  $Y$ -nal, egyebekben pedig a mozgásegyenletek parametereivel lesznek kifejezve. (3)-ban tehát majd rövidíteni lehet  $X$ -el és  $Y$ -nal és akkor  $n^2$  a jobboldalon ki lesz fejezve a parameterekkel egyedül. A számítást VOIGT úgy hajtja végre, hogy (2)-t megszorozza  $\pm i$ -vel és hozzáadja (1)-hez. Az

$x \pm iy = \zeta, X \pm iY = Z, f_{ik} \pm ig_{ik} = h_{ik}$  és  $f_i \pm ig_i = h_i$  rövidítések bevezetése után lesz:

$$\begin{aligned} m\ddot{\zeta}_1 + k_1\zeta_1 + h_{11}\dot{\zeta}_1 + h_{12}\dot{\zeta}_2 + \dots &= eZ \\ m\ddot{\zeta}_2 + k_2\zeta_2 + k_{21}\dot{\zeta}_1 + k_{22}\dot{\zeta}_2 + \dots &= eZ. \end{aligned} \quad (4)$$

(3)-ból pedig lesz:

$$P_\zeta = n^2 Z = Z + 4\pi Ne \Sigma \zeta_h. \quad (5)$$

(4)-be  $\nu$  frekvenciájú  $e^{ivt}$  periodikus megoldásokat helyettesítve lesz:

$$\begin{aligned} p_1\zeta_1 + ih_{12}\zeta_2 + ih_{13}\zeta_3 + \dots &= eZ \\ ih_{21}\zeta_1 + p_2\zeta_2 + ih_{23}\zeta_3 + \dots &= eZ \\ \text{---} & \text{---} \\ p_i &= k_i + ih_i - m\nu^2 \quad i = 1, 2, \dots, a. \end{aligned} \quad (6)$$

A (6) rendszert megoldva  $\zeta_h$ -ra és a nyert értékeket (5)-be helyettesítve, lesz

<sup>1</sup> Lásd pl. RYBÁR I. l. c. 122. l.



$$n^2 Z = Z + \Pi_{\pm} Z \quad (7)$$

$$Z(n^2 - 1 - \Pi_{\pm}) = 0, \quad (8)$$

a hol  $\Pi_{\pm}$  egy hányados, melynek nevezője a (6) rendszer determinánsa, számlálója pedig az összes első aldeterminánsok összege. A nevező tehát  $\alpha$ -fokú, a számláló pedig  $\alpha-1$  fokú a  $p_i$ -kben. A kettős előjel miatt (6), (7) és (8) is két egyenlet-rendszert, illetve egyenletet reprezentál:

$$(X+iY)(n_+^2 - 1 - \Pi_+) = 0$$

$$(X-iY)(n_-^2 - 1 - \Pi_-) = 0.$$

Ha  $(X+iY) = 0$ , akkor  $X-iY \neq 0$ , tehát  $n_-^2 = 1 + \Pi_-$ , a mi a negatív körösen polározott hullám törésmutatója; ha  $X-iY = 0$ , akkor  $n_+^2 = 1 + \Pi_+$ , a mi a pozitív körösen polározott hullám törésmutatója. Tehát minden  $\nu$ -höz  $n$ -nek két értéke tartozik, vagyis kettős törés áll elő, még pedig cirkuláris kettős törés. Ha a mágneses tér intenzitása zérus, a (6) rendszerből lesz:

$$p_i^0 \zeta_i = eZ \quad (9)$$

$$p_i = k_i + i\nu f_i - m\nu^2 \quad i=1, 2, \dots, \alpha.$$

$\nu_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$  az önfrequenciákat adja, melyekkel a mágneses térben egymással kapcsolt különböző elektronok tértőlküli állapotukban rezeghetnek.

Ha valamennyi  $k_i$  és  $f_i$  egyenlő, akkor az  $\alpha$ -számú mágnesesen kapcsolt elektron mindegyike tértőlküli állapotában ugyanazon  $\nu_0$  frekvenciával rezeg, tehát *egy* spektrálvonallal, de *egy úgynevezett többszörös* vonallal van dolgunk, mely többszörös,  $\alpha$ -szoros karakterét azonban csak mágneses térben árulja el, mikor is  $2\alpha$  számú mágneses komponensre bomlik a longitudinális effektusnál.

Ekkor ugyanis valamennyi  $p_i = p$ -vel.  $\Pi_{\pm}$  nevezője  $\alpha$ -fokú  $p$ -ben, számlálója pedig  $\alpha-1$  fokú. VOIGT bebizonyította, hogy ily többszörös vonal esetében úgy a számláló, mint a nevező összesoefficiensei valóságosak és a nevezőnek csak valós *p-gyökei* vannak.



Tehát:

$$H_{\pm} = \frac{Q_1}{p+R_1\nu} + \dots + \frac{Q_a}{p+R_a\nu},$$

hol a  $Q_i$ -k és  $R_i$ -ik valósak. A

$$p+R_i\nu = k \pm \nu g + R_i\nu - m\nu^2 + i\nu$$

nevezők valós részeinek eltűnése

$$k \pm \nu g + R_i\nu - m\nu^2 = 0$$

határozza meg az abszorpciósíkok, illetve a longitudinális ZEEMANN-componensek frekvenciáit. A többszörös vonal esetében ily módon keletkező  $2a$  számú mágneses komponensről VOIGT kimutatja, hogy azok szimmetrikusan helyezkednek el a  $\nu_0$  frekvenciához képest.

A következőkben röviden vázolom, hogyan specializálja VOIGT elméletét, illetve a (6) alatti egyenletrendszer, például a  $N_a$   $D$ -vonal tipusának konkrét esetében, mert ezáltal legjobban ki fog tűnni az elmélet teljesítőképessége. Az egyenletrendszer egyszerűsítésére vezető irányelveket részben PASCHEN és BACK észleléseiből meríti, részben pedig oly észlelésekből, melyek a  $D$ -vonalak kicsiny és közepes terekben jelentkező ZEEMANN-effektusaira vonatkoznak.

1. Az első tény, melyet VOIGT felhasznál, az, hogy a  $D_1$  és  $D_2$  vonalat emittáló elektronok egymással mágnesesen kapcsolva vannak, a mi kitűnik azokból az észlelésekből, melyek szerint oly nagy mágneses terekben, hol a  $D_1$  mágneses komponensei elérik  $D_2$ -t és viszont, a  $D_1$  komponensei deformálják a  $D_2$  felbontásának geometriai és intenzitásbeli konfigurációját és viszont, szóval a két felbontás kölcsönösen befolyásolja egymást. Legyen a  $D_1$ -et emittáló centrum szabadsági fokainak száma  $M_1$ , a  $D_2$ -éinek  $M_2$ . Ha már most  $D_1$  és  $D_2$  kapcsolva vannak, akkor az  $M_1:M_2$  viszonyoknak dokumentálódni kell a transversális effektusnál úgy az erőterre merőlegesen rezgő mágneses komponensek számában, mint a párhuzamos komponen-



sek számában is. Legyen most  $M_1$  és  $M_2$  a mérőleges komponensek száma,  $P_1$  és  $P_2$  a párhuzamos komponensek száma, akkor a kapcsolásból következik, hogy

$$M_1 : M_2 = P_1 : P_2.$$

Ha például a  $D$ -vonalak transversalis effektusánál a mérőleges komponensek számát nézzük, látjuk, hogy az kétszer akkora  $D_2$ -nél, mint  $D_1$ -nél. Ebből az következik, hogy a  $D_2$ -t emittáló centrum szabadsági fokainak száma kétszer akkora, mint a  $D_1$ -et emittáló centrum szabadsági fokainak száma. Evvel összhangban van az az észlelés, hogy a  $D_2$  vonal térnélküli állapotában intenzívebb mint  $D_1$ . Sőt ROSCHDESTVENSKY<sup>1</sup> egy szellemes módszerrel tanulmányozván a natriumgőz dispersióját a két  $D$ -vonal közötti intervallumban, kísérletileg meghatározta a szabadsági fokok számának viszonyát és azt találta, hogy az 1.98, tehát közel 2.

Ezen összevágó tapasztalatokkal szemben azt látjuk, hogy a  $p$ -komponensek számában nem nyilvánul meg a szabadsági fokok ezen viszonya. Minthogy azonban  $D_1$  és  $D_2$  mágnesesen kapcsolva vannak, ragaszkodnunk kell a  $p$ -komponenseknél is a 2 viszonzyszámhoz, tehát fel kell tennünk, hogy a  $D_2$   $p$ -komponenseiből is 4 darab van, tehát  $D_2$  egy teoretikus oktett. 2 darab  $p$ -komponens hiányozhatik in praxi, vagy azért, mert összeesik két észlelittel, vagy mert másutt van ugyan, de az intenzitása zérus.

2. PASCHEN és BACK vizsgálataiból következik továbbá, hogy nagy mágneses terekben a mágneses komponensek szimmetrikusan helyezkednek el a  $D_1$  és  $D_2$  vonal súlyvonalára vonatkozólag, mely tehát a két vonal közti távolság egy harmadában fekszik  $D_2$ -től számítva. Ebből egész általánosságban azt a következtetést vonhatjuk, hogy a  $g_{ii} = g_i k$  valamennyi kapcsolt,  $\alpha$ -számú elektronra vonatkozólag ugyanazon  $g$  értékkel bírnak. A  $\Pi_{\pm}$  kifejezésében szereplő

<sup>1</sup> D. ROSCHDESTVENSKY : Ann. d. Phys. Bd. 39. S. 307.



$$p_i = k_i + i h_i \nu - m \nu^2,$$

$$h_i = f_i \pm i g_i$$

helyébe írjunk

$$p_i = p + \pi_i t,$$

a hol

$$p = \frac{1}{\alpha} \Sigma p_i, \quad k = \frac{1}{\alpha} \Sigma k_i$$

és

$$h = \frac{1}{\alpha} \Sigma h_i,$$

tehát

$$\pi_i = k_i - k + i \nu \{ (f_i - f) \pm i (g_i - g) \}.$$

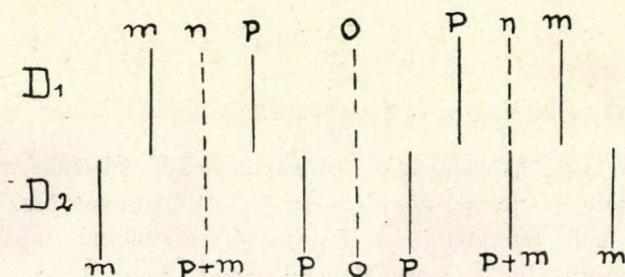
$k$  szabja meg az ú. n. súlyvonal  $\nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  frekvenciáját.  $\Pi_{\pm}$  számlálója  $\alpha-1$ -fokú, a nevezője  $\alpha$ -fokú homogén függvénye lesz  $p$ -nek és  $\nu$ -nek. A koefficiensekben szerepel  $h_{ik}$  mellett még  $\pi_i$ . Ha  $\pi_i = 0$ , akkor  $\Pi_{\pm}$  kifejezése ugyanaz, mint volt egy többszörös vonal esetén, mikor valamennyi  $p$  egyenlő, tehát  $\alpha$ -számú egyenlő önfrequenciával rendelkező elektron van kapcsolva. Ez esetben azonban VOIGT, mint említettem, bebizonyította, hogy a felbontás szimmetrikus a  $\nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  frekvenciára vonatkozólag. Tehát azt kell csak keresni, hogy mi a feltétele annak, hogy nagy mágneses terekben  $\pi_i$  kicsiny legyen  $h_{ik}$  mellett.  $h_{ik}$  arányos a mágneses tér intenzitásával,  $R_0$ -val,  $\pi_i$  kifejezésében csak  $g_i - g$ -ben van benne  $R_0$ . Tehát kell, hogy  $g_i = g$  legyen, vagyis ugyanaz valamennyi elektronra. Ez a PASCHEN és BACK-féle észlelés tehát már a paraméterek számának egy első lényeges redukciójához vezetett.

3. Másrészt bebizonyítja VOIGT, hogy ha egy többszörös vonal felbontása olyan, hogy a térnélküli  $\nu_0$  frekvenciától jobbra és balra eső mágneses komponensek külön-külön szimmetrikusan helyezkednek el  $\nu_0 - \mu_s$  és  $\nu_0 + \mu_s$  szimmetria-vonal körül, akkor  $\mu_s$  értékét  $g$  határozza meg:  $2m\mu_s = g$ . Ez érvényes külön az  $m$  és külön a  $p$ -komponensekre nézve. A normális triplet esetében ez evidens, ott  $g = \frac{eR_0}{c}$ . A  $D_1$  és  $D_2$  vonalak



mágneses felbontásai kicsiny mágneses terekben külön-külön ebbe a kategóriába esnek.

A 2. alatti meggondolásokból következik, hogy a  $g_i$  értéke mindkét vonalra ugyanaz a  $g$ , tehát a térnélküli vonal helyétől jobbra és balra lévő mágneses komponensek  $\nu_0 \pm \mu_s$  szimmetria-centrumai külön az  $m$  és külön a  $p$ -komponensekre nézve úgy a  $D_1$ , mint a  $D_2$  vonalnál egyenlő távolban kell hogy legyenek a térnélküli vonal helyétől. Ezen meggondolásokból következik a theoretikus  $D_2$ -oktettnek az 1. ábrában



1. ábra.

(2. sor) látható geometriai elrendeződése kicsiny mágneses terekben. Két  $p$ -komponens zérus intenzitással ugyanott kell hogy legyen, a hol a két belső  $m$ -komponens van. A két hiányzó komponens helyét tehát egész általános meggondolások alapján meg lehetett állapítani.

4. A PASCHEN-BACK-féle észlelések leglényegesebb eredménye a tulajdonképeni PASCHEN-BACK-effektus, hogy tehát nagy mágneses terekben mikor már a  $\pi_i$ -k a  $h_{ik}$ -k mellett elhanyagolhatók, az  $m$ -komponensek egy dubletre húzódnak össze. Ehhez az szükséges, hogy a  $\Pi_{\pm}$  hányados számlálója foglaltassék a nevezőben. Ekkor

$$\Pi_{\pm} = \frac{1}{p \pm \nu q}, \quad (10)$$

a hol  $q$  valós érték. Nagy mágneses terekben tehát a súlyvonal  $\nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  frekvenciájától jobbra és balra kapunk egy-

egy  $m$ -komponenst transversális effektusnál, egy-egy körösen polározott komponenst longitudinális effektusnál. Ezen komponensek  $\nu_0$ -tól számított  $\mu$  távolsága a

$$p \pm \nu q = k \pm \nu g \pm \nu q - m\nu^2 + i\nu f$$

nevező valós részének.

$$k \pm (g + q)\nu - m\nu^2 = 0$$

eltűnése által van meghatározva. Lesz tehát

$$\mu = \pm \frac{g+q}{2m}, \quad (11)$$

minthogy  $\mu$  kicsiny  $\nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  mellett.

Hogy (10) bekövetkezzék, annak megfelelő feltételei vannak, a számláló és nevező koefficiensei között bizonyos összefüggéseknek kell fennállani. A PASCHEN-BACK-effektus tehát még tovább redukálja a parameterek számát, hogy hogyan, azt a  $D$ -vonalak speciális esetében rögtön látni fogjuk. Hogy a nagy mágneses terekben létrejövő duplet komponensei  $\nu_0$ -tól mily távolságban lesznek, az, mint (11)-ből látható,  $g$  és  $q$  értékeitől függ.  $g$  és  $q$  numerikus értékei azonban a kicsiny mágneses terekben jelentkező komplikált típusú felbontás geometriai és intenzitásbeli viszonyai alapján kísérletileg meghatározhatók.

A  $D$ -vonalakra vonatkozólag a (6) egyenletrendszer a következőképpen egyszerűsödik. Először tudjuk, hogy a  $D_2$ -vonalnak 2-szer annyi szabadsági foka van, mint  $D_1$ -nek.  $D_1$  emisziója egy elektronra vezethető vissza, tehát  $D_2$ -é 2 elektronra. Tehát három egyenletünk lesz:

$$\begin{aligned} p_1 \zeta_1 + i\nu h_{12} \zeta_2 + i\nu h_{13} \zeta_3 &= eZ \\ i\nu h_{21} \zeta_1 + p_2 \zeta_2 + i\nu h_{23} \zeta_3 &= eZ \\ i\nu h_{31} \zeta_1 + i\nu h_{32} \zeta_2 + p_3 \zeta_3 &= eZ. \end{aligned} \quad (12)$$

Ez egyszerűsödik

1. mert a nagy mágneses terekben fellépő szimmetria miatt  $g_1 = g_2 = g_3 = g$ ,



2. a  $D_2$  vonal a tapasztalat szerint egyetlen éles vonal, tehát egy *kettős* vonal,  $p_2 = p_3$ ,

3. az  $m$ -komponensek nagy mágneses terekben 2-komponensre húzódnak össze. Ennek feltételei, mint VOIGT részletelesen kimutatja, az, hogy

$$h_{12} = h_{23} = h_{31} = h'$$

és

$$h_{21} = h_{13} = h_{32} = h'',$$

tehát

$$h' = f' \mp ig' \quad \text{és} \quad h'' = -f' \mp ig'.$$

Tehát (12) lesz:

$$\begin{aligned} p_1 \zeta_1 + i\nu h' \zeta_2 + i\nu h'' \zeta_3 &= eZ \\ i\nu h'' \zeta_1 + p_2 \zeta_2 + i\nu h' \zeta_3 &= eZ \\ i\nu h' \zeta_1 + i\nu h'' \zeta_2 + p_3 \zeta_3 &= eZ \end{aligned} \quad (13)$$

és tudjuk, hogy  $g_1 = g_2 = g$ .

Kicsiny mágneses terekben eltekinthetünk a  $D_1$  és  $D_2$ -vonalaikat emittáló elektronok kölcsönös mágneses kapcsolásától és ott a  $D_1$  longitudinális ZEEMANN-effektusát a

$$p_1 \zeta_1 = eZ \quad (14)$$

a  $D_2$  ZEEMANN-effektusát pedig a

$$\begin{aligned} p_2 \zeta_2 + i\nu h' \zeta_3 &= eZ \\ i\nu h'' \zeta_2 + p_3 \zeta_3 &= eZ \end{aligned} \quad (15)$$

egyenletek adják.

Igen nagy mágneses terekben, hol  $\pi_1$  és  $\pi_2$  a  $h'$  és  $h''$  mellett elhanyagolhatók,  $\Pi_{\pm}$  illetve  $n_{\pm}^2$ -ra (13) alapján nyerjük, hogy

$$n_{\pm}^2 = 1 + 6\pi N e^2 \Sigma \frac{1}{p \pm \nu 2g'}.$$

Tehát (10) és (11) alapján:

$$\mu = \pm \frac{g + 2g'}{2m}. \quad (16)$$

Hogy tehát a nagy mágneses terekben keletkező transversális triplet szélső  $m$ -komponenseinek, vagy a longitudinális dublet komponenseinek a  $\nu_0$  súlyvonal-frequenciától mért távolságát kiszámíthassuk, ismerni kell  $g$  és  $g'$  értékeit. Ezek meghatározhatók a  $D_1$  és  $D_2$  vonal kis mágneses terekben jelentkező ZEEMANN-effektusainak geometriai és intenzitásbeli viszonyai alapján. A  $g$ , mint tudjuk, a  $\mu_s$ -nek, jelen esetben a merőleges komponensek szimmetria-centrumának a távolságát méri a  $D_1$ , illetve a  $D_2$ -vonaltól jobbra és balra.  $g = 2m\mu_s$ .

A kísérletek tanúsága szerint (lásd 1. ábra)

$$g = \frac{4}{3} g_n, \quad (17)$$

a hol

$$g_{\text{normális}} = \frac{eR_0}{c},$$

a normális triplet

$$\mu_s = \frac{eR_0}{2mc}$$

felbontásának a mértéke.

Hátra van  $g'$  meghatározása. Ez, a  $D_2$ -vonal kis mágneses terekben fellépő ZEEMANN-effektusa  $m$ -komponenseinek intenzitásából határozható meg. (15) alapján ugyanis

$$n_{\pm}^2 = 1 + \frac{2\pi Ne^2}{\nu^2} \sum \left( \frac{1 \mp g'/r}{-2m\mu + if_2 \pm g - r} + \frac{1 \pm g'/r}{-2m\mu + if_2 \pm g + r} \right), \quad (18)$$

a hol

$$r^2 = f'^2 + g'^2.$$

A 4 darab  $m$ -komponens tehát  $D_2$ -től jobbra és balra a

$$2m\mu = \begin{cases} +g + r & -g + r \\ +g - r & -g - r \end{cases}$$

által definiált frekvenciájú helyeken lesz, a mint az az észleléseknek megfelelő 1. ábrából is látható.

Minthogy

$$g = \frac{4}{3} g_n, \quad \text{tehát} \quad r = \frac{1}{3} g_n. \quad (19)$$



A térnélküli  $D_2$ -frekvencia egyik oldalán levő két  $m$ -komponens intenzitásainak viszonyát a (18) összeg megfelelő tagjai szám-lálóinak

$$\frac{1 + g'/r}{1 - g'/r}$$

viszonya adja. HANSEN kis mágneses terekben végzett észlelései szerint

$$\frac{1 + g'/r}{1 - g'/r} = \frac{1}{3}. \quad (20)$$

Tehát (19) és (20) alapján

$$g' = -\frac{1}{3}g_n.$$

(16)-ból tehát lesz:

$$\mu = \pm \frac{g + 2g'}{2m} = \pm \frac{\frac{4}{3}g_n - \frac{1}{3}g_n}{2m} = \pm \frac{g_n}{2m} = \frac{eR_0}{2mc}. \quad (21)$$

Tehát a  $D_1$  és  $D_2$  vonal 10 mágneses komponenséből nagy mágneses terekben keletkező transversális triplet külső  $m$ -komponensének, vagy a mi ugyanaz, a longitudinális dublet komponensének távolsága a térnélküli frekvenciától egyenlő a normális felbontás nagyságával. Ez az eredmény tudvalevő egyezik a tapasztalattal. Figyelemreméltó itt, hogy nem VOIGT választja meg a paraméterek értékeit úgy, hogy nagy mágneses terekben kijöjjön a normális triplet felbontásának nagysága. A (13) egyenletrendszerben még szereplő néhány parameter értéket teljesen meghatározzák a kis mágneses terekben fellépő  $D_1$ -quartett és  $D_2$ -oktett komponenseinek relativ intenzitásai és geometriai elrendeződése. Ezeknek HANSEN és mások által kis terekben kísérletileg meghatározott numerikus értékei alapján számítja ki VOIGT, hogy milyen lesz a felbontás nagy terekben.

Hogy az ily módon kiszámított érték a tapasztalattal oly kitűnően egyezik, az az elmélet elsőrangú teljesítménye. Ez különben az a pont, hol VOIGT elmélete a kísérleti kutatás számára számos új feladatot mutat.

Természetesen ép úgy, mint az  $m$ -komponensek helyét a (21) alatt, kiszámíthatjuk a  $p$ -komponensek helyét is nagy mágneses terekben. A (6), illetve (13) rendszer ugyan, mint tudjuk, itt nem alkalmazható, mert nem vonatkozik a  $z$ -menti rezgésekre, de egészen analog formulák érvényesek. Az 1. ábrából is látható, hogy  $p$ -komponenseknél

$$g = \frac{2}{3}g_n \quad \text{és} \quad r = \frac{1}{3}g_n.$$

Viszont tudjuk, hogy a  $D_2$   $p$ -komponensei közül kettőnek az intenzitása zérus, tehát

$$1 + \frac{g'}{r} = 0,$$

vagyis

$$r = \frac{1}{3}g_n = -g'.$$

Akkor pedig (16)-ból lesz:

$$\mu = \pm \frac{\frac{2}{3}g_n - \frac{2}{3}g_n}{2m} = 0.$$

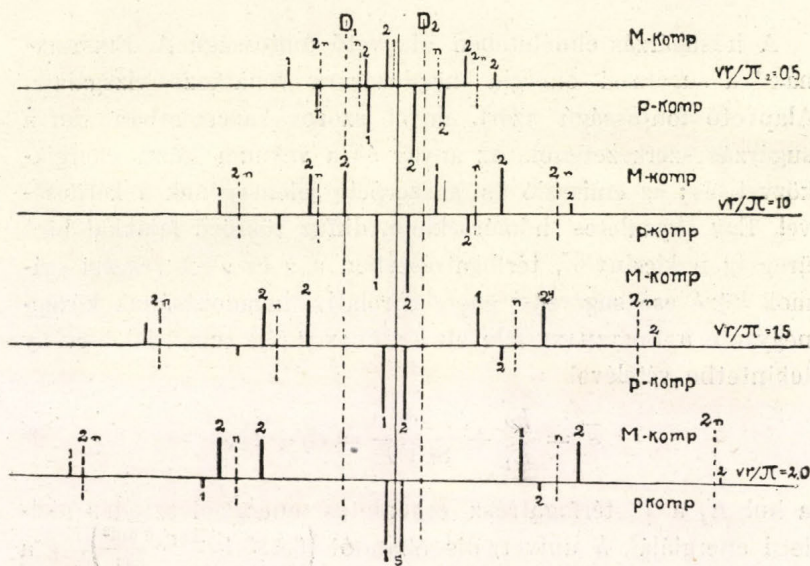
Tehát nagy mágneses terekben a tranzverzális-effektus  $p$ -komponense a súlyvonal helyére kerül. Ez egyezik a tapasztalattal.

VOIGT azonban még tovább megy és a parameterek kis mágneses terekben meghatározott értékeit arra is felhasználja, hogy közepes mágneses terekben lépésről-lépésre kövesse, hogyan alakul át a  $D_1$ -quartett és  $D_2$ -oktett a térerősség növekedésével normális triplétté.

Számításainak eredményei a 2. ábrában vannak graphikusan feltüntetve. Az ábra a mágneses komponensek elhelyezését, intenzitását és polározási állapotát tünteti elő 4 különböző intenzitású közepes mágneses térben. Az erővonalakra merőlegesen rezgő komponensek felfelé, a párhuzamosan rezgők lefelé húzott egyenesdarabokkal vannak előtüntetve, melyeknek hossza arányos a komponens intenzitásával. A  $D_1$ , illetve  $D_2$  komponensei az egyenesek fölé, illetve alája írt 1 és 2 indexszel vannak jelezve.



Az ábra a tranzverzális effektusra vonatkozik. A  $D_1$  és  $D_2$ -vel jelelt vertikális pontozott egyenes a vonalak térnélküli helyét jelöli; a kihúzott függélyes vonal, a dublet súlyvonalára és végül az  $n$ , illetve  $2n$  indexszel jelelt pontozott vonalak a súlyvontól számított normális felbontást, illetve annak kétszeresét jelölik. Ehhez az ábrához szószerinti szövegnek lehet mellékelni BACK-nak ez észleléseire vonatkozó jegyzőkönyvét.



2. ábra.

Sajnos, a nátrium  $D$ -dublet ezideig az egyetlen konkrét példa, melyen az elméletet annyira aprólékos részleteiben<sup>2</sup> is össze lehetett hasonlítani a tapasztalattal, mert a  $D$ -dublet mágneses felbontása az egyetlen, melyet oly részletesen tanulmányoztak különösen kis mágneses terekben, hogy a paraméterek értékei meghatározhatók voltak. Az itt tapasztalt kitűnő egyezés azonban feljogosít a reményre, hogy a kísérleti kutatás által a jövőben részletesen tanulmányozandó típusoknál is Voigt elmélete hasonló sikerrel fogja helyét megállani.

Pogány Béla.

<sup>1</sup> Általánosabb vonásokban Voigt már az  $O$ -tripletet is tárgyalta, Ann. d. Phys. Bd. 43.

## A SUGÁRZÁS ÉS A GÁZ ENERGIAINGADOZÁSA KÖZÖTTI ANALOGIÁHOZ.

A hősugárzás elméletében alapvető fontosságú A. EINSTEIN-nak<sup>1</sup> a sugárzási energia ingadozására vonatkozó vizsgálata. Alapvető fontosságú azért, mivel szoros kapcsolatban van a sugárzás szerkezetének, az anyag és a vakuum közti energia-közvetítés: az emisszió és abszorpció jelenségének a kérdésével. Egy egyenletes hőmérsékletű, diffúz tükröző falakkal bíró üreg igen kicsiny  $V_1$  térfogatrészében a  $\nu$  és  $\nu+1$  rezgési számok közé eső sugárzási energia relativ ingadozásának közép-négyzete a BOLTZMANN-féle elv s a PLANCK-féle sugárzási törvény tekintetbe vételével

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{h\nu}{E_1} + \frac{c^3}{8\pi V_1 \nu^2} = \overline{\varepsilon_Q^2} + \overline{\varepsilon_H^2}, \quad (1)$$

a hol  $E_1$  a  $V_1$  térfogatrész egyenletes energiaelosztódás melletti energiáját,  $h$  univerzális állandót ( $6,415 \cdot 10^{-27} \frac{\text{g cm}^2}{\text{sec}}$ ),  $c$  a fény légüres térre vonatkozó terjedési sebességét jelenti. Az energiaquantumok számának ingadozásával magyarázható első részt quantumingadozásnak ( $\varepsilon_Q$ ), a hősugarak interferenciájára vonatkozó második részt HUYGENS-féle ingadozásnak ( $\varepsilon_H$ ) nevezzük.

E sorok írója részletesen foglalkozott<sup>2</sup> az ideális, egyenletes hőmérsékletű gáz energiaingadozásával, röviden megállapította a sugárzási energia ingadozása és a gáz energiaingadozása kö-

<sup>1</sup> A. EINSTEIN: Phys. Zeitschr. X. 188. l. (1909).

<sup>2</sup> Verh. d. D. Phys. Ges. XVII. 122. l. (1915)., Math. és Phys. Lapok, XXIV. 159. l. (1915).



zötti analógiát. A gáz energiaingadozása is két részből áll: a molekulaszám ingadozására vonatkozó részből, vagyis a sűrűségi ingadozásból ( $\varepsilon_s$ ) — a quantumingadozásnak megfelelő rész — s a molekulák energiáinak az összeütközések következtében beálló változásaiból, vagyis a hőingadozásból ( $\varepsilon_H$ ), a mely a HUYGENS-féle ingadozásnak felel meg. A  $V_1$  térfogatrészre vonatkozó relativ energiaingadozás középnégyzete (a BOLTZMANN-féle elv s a kinetikai gázelmélet alapján)

$$\overline{\varepsilon_G^2} = \overline{\varepsilon_s^2} + \overline{\varepsilon_H^2} = \frac{1}{n_1} + \frac{2}{n_1 q}, \quad (2)$$

a hol  $n_1$  a  $V_1$  térfogatrész molekuláinak száma a molekulák egyenletes elosztódása esetén,  $q$  egy molekula szabadsági fokainak számát jelenti.

A következőkben részletesen vizsgálom a sugárzás és a gáz energiaingadozása közötti analógiát. Az első részben (I) a termodinamikai egyensúlyban levő gáz közép hőingadozásának (középnégyzet) kiszámításáról lesz szó. Jelzett dolgozataimban a hőingadozás vizsgálatánál *külön-külön* számítottam a tekintetbe vett igen kicsiny térfogatrész minden egyes koordinátájához, tehát minden egyes molekulájához tartozó energiaingadozás, azaz hőingadozás középnégyzetét. Látni fogjuk, hogy egy-atomú gázoknál a molekuláris elméletre jellemző BOLTZMANN-EINSTEIN-féle elosztódási függvényből kiindulva *együttesen* is számíthatjuk térfogatrészünk valamennyi koordinátájának, tehát valamennyi molekulájának megfelelő hőingadozás középnégyzetét. A második részben (II) kimutatom, hogy a sugárzás alkotó hullámai (Eigenschwingungen), a sugárzási koordináták bevezetésével analog eljárások rendjén — először a térfogatrész minden egyes sugárzási koordinátájához tartozó, az interferencia révén bekövetkező energiaingadozás középnégyzetét külön-külön, másodsor együttesen számítva — egy igen kicsiny térfogatrészben a sugárzási energia HUYGENS-féle ingadozásának középnégyzete is számítható. A sűrűségi ingadozás és a quantumingadozás közötti analógia részletes vizsgálata csak

akkor lesz lehetséges, ha a quantumingadozásnak pontos, a fény hullámelméletével megegyező magyarázatát ismerni fogjuk; a quantumingadozásról feltehető, hogy az energiaközvetítést végző oszcillátorok energiaingadozásaival van meghatározva.<sup>1</sup>

## I. A gáz hőingadozása.

A  $V_1$  térfogatrészben levő molekulák *egyes* koordinátáinak, vagyis a sebességi koordinátáknak és a szögsebességi koordinátáknak megfelelő energiaingadozás középnégyzetét a BOLTZMANN-EINSTEIN-féle elosztódási függvényből határozzuk meg. Minden egyes koordináta-hoz tartozó energiaingadozás középnégyzete:

$$\frac{(kT)^2}{2} \left( k = 1,34 \cdot 10^{-16} \frac{g \text{ cm}^2}{\text{sec}^2 \text{ fok}} \right).$$

A valószínűségi számítás tételei szerint a  $V_1$  térfogatrészben levő  $n_1$  molekula hőingadozásának középnégyzete egyenlő az egyes koordinátáknak megfelelő energiaingadozások középnégyzeteinek összegével. Következésképpen térfogatrészünkben levő  $n_1$  molekula hőingadozásának  $(\epsilon_{kH})$ , illetőleg relativ hőingadozásának  $(\epsilon_H)$  középnégyzete

$$\overline{\epsilon_{kH}^2} = \frac{n_1 q}{2} k^2 T^2, \quad \text{illetőleg} \quad \overline{\epsilon_H^2} = \frac{2}{n_1 q}.$$

Egyatomú gázoknál — hol  $q = 3$  — úgy is számíthatjuk a hőingadozás középértékét, hogy először azt keressük, mekkora annak valószínűsége, hogy a  $V_1$  térfogatrészben levő 2, 3, 4, ...  $n_1$  molekula közül átlagosan mindegyiknek  $E$  és  $E + dE$  közé eső energiája van (legyen a  $V_1$  igen kicsiny a gáztartó térfogatának többi részéhez képest). Annak a valószínűsége, hogy egy molekula energiája  $E$  és  $E + dE$  közé esik,

<sup>1</sup> M. PLANCK: Ann. d. Phys. XXXI. 758. 1. (1910).



a jelzett BOLTZMANN-EINSTEIN, illetőleg MAXWELL-féle elosztódási függvényből<sup>1</sup>

$$W_1(E) dE = \text{konst.} \cdot e^{-\frac{E}{kT}} \sqrt{E} dE. \quad (3)$$

Ha a  $V_1$  térfogatrészben tekintetbe vett két molekula közül az egyik  $E_1$  energiájú, a másik molekulának  $2E - E_1$  energiájúnak kell lennie avégből, hogy átlagosan mindkettő  $E$  energiájú legyen. Annak a valószínűsége, hogy mindkettőnek átlagosan  $E$  és  $E + dE$  közé eső energiája van,

$$W_2(E) dE = \int_0^{2E} W_1(E_1) dE_1 W_1(2E - E_1) d(2E - E_1),$$

mivel az  $E_1$  0-tól  $2E$ -ig változhatik. A (3) alatti egyenlet alapján tehát

$$W_2(E) dE = \text{konst.} \cdot e^{-\frac{2E}{kT}} dE \int_0^{2E} \sqrt{2EE_1 - E_1^2} dE_1,$$

$$\int_0^{2E} \sqrt{2EE_1 - E_1^2} dE_1 = \frac{\pi E^2}{2} \cdot t$$

helyettesítve

$$W_2(E) dE = \text{konst.} \cdot e^{-\frac{2E}{kT}} E^2 dE. \quad (4)$$

Ha a  $V_1$  térfogatrészben tekintetbe vett három molekula közül az egyik  $E_1$  energiájú, a másik két molekulának átlagosan

<sup>1</sup> Annak a valószínűsége, hogy egy molekula sebességi koordinátái, illetőleg sebessége  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  és  $\xi + d\xi$ ,  $\eta + d\eta$ ,  $\zeta + d\zeta$ , illetőleg  $u$  és  $u + du$  közé esnek.

$$W d\xi d\eta d\zeta = \text{konst.} \cdot e^{-\frac{m}{2kT} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)} d\xi d\eta d\zeta,$$

illetőleg

$$W du = \text{konst.} \cdot e^{-\frac{m}{2kT} u^2} u^2 du;$$

$\frac{mu^2}{2} = E$  helyettesítéssel következik a fenti egyenlet... Ez utóbbi elosztódási függvényből kiindulva vizsgálta F. v. HAUER az egyatomú gázok hőmérsékleti ingadozásait. L. Ann. d. Phys. XLVII, 365. l. (1915). A (4), (5), (6) alatti egyenletek analogok F. v. HAUER (2), (3), (5) alatti egyenleteivel.

$\frac{3E-E_1}{2}$  energiaértékűnek kell lennie a végből, hogy átlagosan mindhárom  $E$  energiájú legyen. Annak a valószínűsége, hogy mindháromnak átlagosan  $E$  és  $E+dE$  közé eső energiája van, a (3) és (4) alatti egyenletből

$$\begin{aligned} W_3(E) dE &= \int_0^{3E} W_1(E_1) dE_1 W_2\left(\frac{3E-E_1}{2}\right) d\left(\frac{3E-E_1}{2}\right) \\ &= \text{konst.} \cdot e^{-\frac{3E}{kT}} \int_0^{3E} \sqrt{E_1} \left(\frac{3E-E_1}{2}\right)^2 dE_1 dE \\ W_3(E) dE &= \text{konst.} \cdot e^{-\frac{3E}{kT}} E^{7/2} dE, \end{aligned} \quad (5)$$

mivel  $E_1$  0-tól  $3E$ -ig változhatik. A (3), (4), (5) alatti egyenlet alapján tehát annak a valószínűsége, hogy a  $V_1$  térfogatrészben tekintetbe vett  $n_1$  molekula közül mindegyiknek átlagosan  $E$  és  $E+dE$  közé eső energiája van

$$W_{n_1}(E) dE = \text{konst.} \cdot e^{-\frac{n_1 E}{kT} \frac{3n_1}{2} - 1} dE. \quad (6)$$

Következőleg a  $V_1$  térfogatrész  $n_1$  molekulája hőingadozásának középnégyzete

$$\overline{\varepsilon_{kH}^2} = \overline{(n_1 E - n_1 E_0)^2} = \frac{\int_0^\infty (n_1 E - n_1 E_0)^2 e^{-\frac{n_1 E}{kT} \frac{3n_1}{2} - 1} dE}{\int_0^\infty e^{-\frac{n_1 E}{kT} \frac{3n_1}{2} - 1} dE},$$

a hol  $E_0 = \frac{3}{2} kT$ . Ha  $n_1$  páros, az

$$\int_0^\infty e^{-tx} x^n dx = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

egyenlet alapján

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_{kH}^2} &= \frac{n_1^2 \left[ \frac{\left(\frac{3n_1+2}{2}\right)!}{\left(\frac{n_1}{kT}\right)^{\frac{3n_1+4}{2}}} - 2E_0 \frac{\left(\frac{3n_1}{2}\right)!}{\left(\frac{n_1}{kT}\right)^{\frac{3n_1+2}{2}}} \right]}{\frac{\left(\frac{3n_1-2}{2}\right)!}{\left(\frac{n_1}{kT}\right)^{\frac{3n_1}{2}}}} + n_1^2 E_0^2, \end{aligned}$$



ha  $n_1$  páratlan, az

$$\int_0^{\infty} e^{-tx^2} x^{2n} dx = \frac{1.3 \dots (2n-1) \sqrt{\pi}}{2^{n+1} \sqrt{t^{2n+1}}}$$

egyenlet alapján

$$\bar{\varepsilon}_{kH}^2 = \frac{n_1^2 \left[ \frac{1.3 \dots ((3n_1+3)-1) \sqrt{\pi}}{2^{\frac{3n_1+3}{2}} \sqrt{\left(\frac{n_1}{kT}\right)^{3n_1+4}}} - 2E_0 \frac{1.3 \dots ((3n_1+1)-1) \sqrt{\pi}}{2^{\frac{3n_1+1}{2}} \sqrt{\left(\frac{n_1}{kT}\right)^{3n_1+2}}} \right]}{\frac{1.3 \dots ((3n_1-1)-1) \sqrt{\pi}}{2^{\frac{3n_1-1}{2}} \sqrt{\left(\frac{n_1}{kT}\right)^{3n_1}}}} + n_1^2 E_0^2,$$

azaz mindkét esetben

$$\bar{\varepsilon}_{kH}^2 = \frac{3}{2} n_1 (kT)^2;$$

a relativ hőingadozás középnégyzete tehát

$$\bar{\varepsilon}_H^2 = \frac{2}{3n_1},$$

megegyezően az előbbi úton számított eredménnyel.

## II. A sugárzási energia Huygens-féle ingadozása.

Vegyünk egy egyenletes hőmérsékletű falakkal ellátott üregben levő stabilis egyensúlyi állapotú sugárzást  $\nu$  és  $\nu+1$  rezgési számok között. Stabilis egyensúlyi állapotban a sugárzás független a határoló oldalfalak anyagi minőségétől, az oldalfalak tehát hőtanilag izoláló, diffúz tükröző felületeknek tekinthetők. A sugárzási intenzitás általában helyről helyre, ugyanazon a helyen pillanatról pillanatra változik feltevésünk szerint két ok következtében, először az oldalfalakban levő, a sugárzás forrásait képező elektromos oszcillátorok rezgési energiáinak ingadozása miatt (quantumingadozás), másodszer a sugárzást alkotó sugarak interferenciája révén (HUYGENS-féle ingadozás). Gondoljuk az abszolút tükröző, hőtanilag izoláló oldalfalak osz-

cillátorait változatlan energiájúaknak, következésképpen a tekintetbe vett sugárzásunk energiaingadozása egyedül a HUYGENS-féle ingadozásból áll.<sup>1</sup> A sugárzás alkotó hullámai: a sugárzási koordináták (Eigenschwingungen) az interferencia révén változtatják energiájukat; oly pillanatnyi értéket kapnak, mely kisebb vagy nagyobb, mint az az energiaérték, melyet nyernének, ha interferencia nem jönne létre.<sup>2</sup> Egy adott  $T$  hőmérsékleten levő gáz molekuláinak energiaingadozásához hasonlíthatjuk, a mely a molekulák összeütközése következtében jön létre. Az alkotó hullámok igen nagy számából, energiáik rendezetlen elosztódásából következik, hogy energiáik legvalószínűbb elosztódásának kiszámítására a közönséges valószínűségi számítás szabályait alkalmazhatjuk; a gázoknál a molekulák igen nagy száma, a molekulák mozgásainak rendezetlensége jogosít a valószínűségi számítás szabályainak az alkalmazására. Az üregünkben levő alkotó hullámok energiáira vonatkozó elosztódási függvény kiszámítása végett tegyük fel, hogy az alkotó hullámok az üreg belsejében mindenütt ugyanazon feltételek alatt állanak. Legyen  $fdE$  azon alkotó hullámok száma, melyeknek energiája  $E$  és  $E+dE$  között van... Annak a valószínűsége, hogy az üregünkben levő  $N$  alkotó hullám közül *tetszésszerűen*  $n_1, n_2, \dots$  alkotó hullám energiája a  $dE_1, dE_2, \dots$  intervallumba esik,

<sup>1</sup> A BOLTZMANN-féle elv alapján számítva a jelzett sugárzásnak egy igen kicsiny térfogatrészre vonatkozó közép energiaingadozását, a quantumingadozás értékét is kapjuk, mivel a sugárzás entrópiája az energiaközvetítést végző oszcillátoroktól függetlenül nem számítható. L. W. WIEN: Vorlesungen über neuere Probleme der theoretischen Physik in New-York, 1913. 51. l. A jelzett feltételek melletti sugárzásra tehát a BOLTZMANN-féle elv alapján nem számíthatjuk a sugárzási energia középenergiaingadozását.

<sup>2</sup> M. LAUE vizsgálatai szerint rövid statisztikai okoskodás rendjén a sugárzási energiaingadozás mindkét része pontosan számítható azon feltevessel, hogy az alkotó hullámok energiaingadozásai az  $\varepsilon = h\nu$  elemi quantumnak egész-számú többszörösei. L. M. LAUE: Verh. d. D. Phys. Ges. XVII. 198. l. (1915). M. LAUE e feltevésénél az oldalfalak oszcillátorainak energiái is ingadoznak.



$$W = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots} \cdot \frac{(dE_1)^{n_1} (dE_2)^{n_2} \dots}{(E')^N},$$

a hol  $E'$  az egyes alkotó hullámok energiájának lehetséges felső határát jelenti. A nagy  $n$  értékekre érvényes  $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$  STIRLING-féle egyenlet segítségével

$$\log W = N \log N - N \log E' - \int f \log f dE = N \log N - N \log E' - H,$$

a hol  $H$  a BOLTZMANN-féle  $H$  téoréma állapotfüggvénye.

$W$  maximum, ha  $H$  az

$$\int_0^\infty f dE = N \quad \text{és} \quad \int_0^\infty E f dE = U$$

egyenletek teljesülése mellett minimum,  $U$  az üregben levő sugárzási energiát jelenti. Következésképpen termodinamikai egyensúlyban — az entrópiát  $S$ -el jelölve — a  $\delta S = 0$ ,  $\delta N = 0$  és a  $\delta U = 0$  egyenletekből  $f = \text{konst. } e^{-\mu E}$ , hol  $\mu$  a LAGRANGE-féle multiplikátort jelenti.  $\mu$ -t azon kikötés határozza meg, hogy egy alkotó hullám energiája középértékének a PLANCK-féle sugárzási egyenlet és a sugárzási koordináták számának tekintetbe-

vételével  $E_0 = \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}$ -nek kell lennie, tehát a

$$\frac{h\nu}{e^{kT} - 1} = \frac{\int_0^\infty E f dE}{\int_0^\infty f dE} = \frac{\int_0^\infty E e^{-\mu E} dE}{\int_0^\infty e^{-\mu E} dE} = \frac{1}{\mu}$$

egyenletnek teljesülnie kell, azaz  $\mu = \frac{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}{h\nu}$ .

Annak a valószínűsége tehát, hogy egy alkotó hullám energiája  $E$  és  $E+dE$  közé esik,

$$f dE = \text{konst. } e^{-\mu E} dE, \quad (7)$$

következőleg energiaingadozásának középnégyzete

$$\overline{(E-E_0)^2} = \frac{\int_0^\infty (E-E_0)^2 e^{-\mu(E-E_0)} dE}{\int_0^\infty e^{-\mu(E-E_0)} dE} = \frac{1}{\mu^2} = \left( \frac{h\nu}{e kT - 1} \right)^2.$$

Legyen a tekintetbe vett  $V_1$  térfogatrész az üreg  $V$  térfogatának  $k$ -ad része, úgy mivel  $k$  nagy szám, az egész  $V$  térfogatot kitöltő alkotó hullámoknak a  $V_1$  térfogatrészre eső  $k$ -ad részei egymástól függetlenül változóknak tekinthetők, következésképpen a  $V_1$  térfogatrész HUYGENS-féle ingadozásának közép, illetőleg középrelatív négyzete

$$\overline{\varepsilon_{kH}^2} = \frac{8\pi V\nu^3}{c^3 k} \left( \frac{h\nu}{e kT - 1} \right)^2 = \frac{8\pi V_1\nu^3}{c^3} \left( \frac{h\nu}{e kT - 1} \right)^2,$$

illetőleg

$$\overline{\varepsilon_H^2} = \frac{c^3}{8\pi V_1\nu^2}.$$

A HUYGENS-féle ingadozás középértékét — az egyatomú gázoknál követett eljárásnak megfelelően — úgy is számíthatjuk, hogy először azt keressük, mekkora annak valószínűsége, hogy a  $V_1$  térfogatrészben levő 2, 3, ...  $\frac{8\pi V_1\nu^3}{c^3}$  alkotó hullám mindegyikének átlagosan  $E$  és  $E+dE$  közé eső energiaértéke van. Ha a  $V_1$  térfogatrészben tekintetbe vett két alkotó hullám közül az egyik  $E_1$  energiájú, a másiknak  $2E-E_1$  energiájúnak kell lennie a végből, hogy mindkettőnek átlagosan  $E$  energiája legyen. A valószínűsége annak, hogy mindkettőnek átlagosan  $E$  és  $E+dE$  közé eső energiaértéke van, (7) alapján

$$\begin{aligned} W_2(E) dE &= \int_0^{2E} W_1(E_1) dE_1 W_1(2E-E_1) d(2E-E_1) \\ &= \text{konst. } e^{-2\mu E} E dE, \end{aligned} \quad (8)$$

mivel  $E_1$  0-tól  $2E$ -ig változhatik. A megfelelő valószínűség három alkotó hullám esetén



$$W_3(E) dE = \int_0^{3E} W_1(E_1) dE_1 W_2\left(\frac{3E-E_1}{2}\right) d\left(\frac{3E-E_1}{2}\right) \\ = \text{konst. } e^{-3\mu E} E^2 dE. \quad (9)$$

A (7), (8), (9) egyenletek alapján annak a valószínűsége, hogy a  $V_1$  térfogatrészben levő, egymástól függetlenül változó  $\frac{8\pi V_1 \nu^2}{c^3} = a$  alkotó hullám mindegyikének átlagosan  $\bar{E}$  és  $E + dE$  közé eső energiája van,

$$W_a(E) dE = \text{konst. } e^{-a\mu E} E^{a-1} dE.$$

Következőleg a HUYGENS-féle ingadozás középnegyzete

$$\bar{\varepsilon}_{kH}^2 = \frac{\int_0^\infty (aE - aE_0)^2 e^{-a\mu E} E^{a-1} dE}{\int_0^\infty e^{-a\mu E} E^{a-1} dE},$$

az

$$\int_0^\infty e^{-tx} x^n dx = \frac{n!}{t^{n+1}}$$

egyenlet alapján

$$\bar{\varepsilon}_{kH}^2 = \frac{a^2 \left[ \frac{(a+1)!}{(a\mu)^{a+2}} - 2 \frac{1}{\mu} \cdot \frac{a!}{(a\mu)^{a+1}} \right]}{\frac{(a-1)!}{(a\mu)^a}} + \left( \frac{a}{\mu} \right)^2,$$

azaz

$$\bar{\varepsilon}_{kH}^2 = \frac{a^2}{\mu^2};$$

tehát a relatív HUYGENS-féle ingadozás középnegyzete  $a$  és  $\mu$  értékének helyettesítésével

$$\bar{\varepsilon}_H^2 = \frac{c^3}{8\pi V_1 \nu^2}.$$

Ha  $\frac{8\pi V_1 \nu^2}{c^3}$  vegyes szám, úgy az egész számra vonatkozólag az előbbi számítás adja a HUYGENS-féle ingadozás középnegyzete

tét, a törtre vonatkozó részt az egy alkotó hullámhoz tartozó ingadozás középnégyzetéből a megfelelő törttel való szorzás rendjén nyerjük, a végeredmény tehát egyezik az előbbi eredménnyel.

A HUYGENS-féle ingadozás számításánál tehát a sugárzás igen sok koordinátájú, egyatomú gázmolekulának tekinthető. Az egyes koordinátákhoz (alkotó hullámok) tartozó energiaértékek az interferencia révén ingadoznak; az elosztódásukat jellemző elosztódási függvény ismeretével közvetlenül számítható az egyes koordinátáknak megfelelő energiaingadozás középnégyzete, megfelelő összegezéssel nyerhető a kicsiny térfogatrészre vonatkozó ingadozás középnégyzete. Úgy is számíthatunk, hogy az elosztódási függvényből kiindulva először azt a valószínűséget keressük, a mely kifejezi, hogy a térfogatrészhez tartozó koordináták mindegyikének átlagosan bizonyos végtelen kicsiny ugyanazon intervallumba eső energiaértéke van, közvetlenül számíthatjuk aztán az energiaingadozás középnégyzetét. Mindkét eljárás lényegében megfelel a gáz hőingadozása kiszámításánál követett eljárásoknak.

*Szell Kálmán.*



## A HANGTÖLCSÉRRŐL.

A középiskolai fizika-tanítás keretében rendszerint helyet talál a fonográf (grammofon) ismertetése. A hangtölcsér szerepét ilyenkor rendesen avval az egyszerű megjegyzéssel szokás elintézni, hogy az «a hang összetereleése által annak erősítésére szolgál». Ez a magyarázat nyilvánvalóan helytelen; hiszen a tölcsérrel ellátott grammofon hangját nemcsak a tölcsér szája előtt, hanem köröskörül, mindenütt sokkal erősebben halljuk, mint a tölcsérétől, megfosztott grammofonét; tehát a tölcsér ráhelyezése valahogyan azt okozza, hogy *a kibocsájtott hang-energia tényleg megsokszorozódik.*

A jelenségnek helyes magyarázatát az elméleti akusztika régen meglévő eredményeiből vezethetjük le.<sup>1</sup> Induljunk ki abból, hogy a grammofon hangdobozának csillám-lemeze a hanglemez barázdáit követő tű közvetítésével *megszabott formájú és amplitudójú* rezgéseket végez. Helyettesítsük a csillámlemezt a cs csődarabban (1. ábra) a megszabott rezgéseket végző  $d$  dugattyúval s illesszünk a csőhöz egyszer  $\omega$  nyílásszögű, másszor keskenyebb,  $\omega'$  nyílásszögű (s egyelőre végtelen hosszúnak feltételezett) tölcsért. Mindkettőben a hang egyszerű longitudinális gömbhullám alakjában terjed tovább; mivel azonban a dugó által rezgésbe hozott levegőmennyiség mindkét esetben *ugyanakkora*, tehát a dugótól mért egyenlő távolságokban a hullám amplitudója nem lesz egyenlő, hanem a második tölcsérben — a keresztmetszetek viszonyának fordított arányában azaz  $\frac{\omega}{\omega'}$ -szer nagyobb lesz, mint az elsőben. A hang

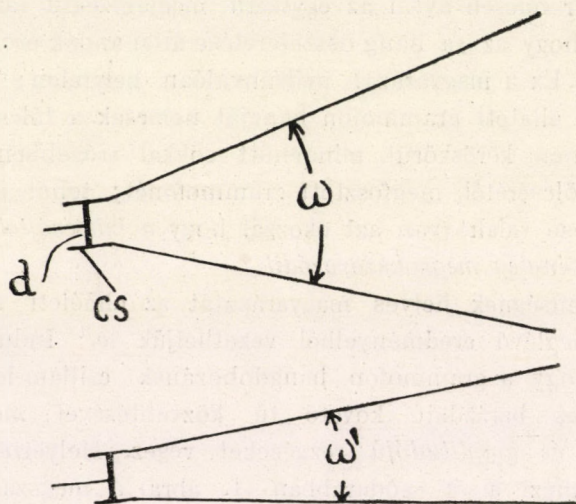
---

<sup>1</sup> V. ö. RAYLEIGH: Theorie des Schalles, II. kötet.

erőssége pedig az amplitudó négyzetével arányos, tehát a második tölcserben  $\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2$ -szer erősebb hang terjed tova; viszont e tölcser keresztmetszete a másiknak csupán  $\frac{\omega'}{\omega}$ -ad része, tehát az egész kibocsátott hangenergia

$$\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 \cdot \left(\frac{\omega'}{\omega}\right) = \frac{\omega}{\omega'}\text{-szer}$$

lesz több a második tölcserben, mint az elsőben. Szóval kifejezve: *ha előírt rezgéseket végző lemezhez (hangforráshoz)*



1. ábra.

különböző nyílásszögű tölcseréket illesztünk, a kibocsátott hangenergia a nyílásszögek fordított arányában, a hang erőssége a nyílásszögek négyzetének fordított arányában növekszik.

Eszerint a hangtölcser<sup>1</sup> a grammofon hangsugárzását annyszorosára növelné, ahányszor a tölcser nyílásszöge az egész térszögben,  $4\pi$ -ben foglaltatik. Ez a következtetés azonban

<sup>1</sup> Itt a tölcserhez azt a kúpos csődarabot is hozzászámítjuk, a mely a hangdobozt a tulajdonképeni tölcserrel összeköti.



csupán durva közelítésben helyes; mert a grammofont tekintve meggondolandó, hogy a csillámlemez a tölcsér ráhelyezése előtt is inkább csak egyoldalón szabad, tehát  $4\pi$  helyett inkább  $2\pi$  lenne teendő, viszont a rezgő dugattyú tölcsér híjján igaz, hogy  $4\pi$  nyílásszögű hullámot kelt, de nem azt a legegyszerűbb gömbhullámot, mint a minő a tölcsérben terjed tova. Pusztán tájékoztatásra azonban mindenesetre szolgálhat ez a viszony-szám, a mely értékére nézve 100—200 körül jár, ha a nyílás-szöveget a tölcsér *keskeny* végén mérjük. Rendszerint azonban tölcsér kúpszöge a tágasabb nyílása felé fokozatosan növekszik; ennek a körülménynek s a tölcsér véges voltának befolyásáról még majd számot kell adnunk.

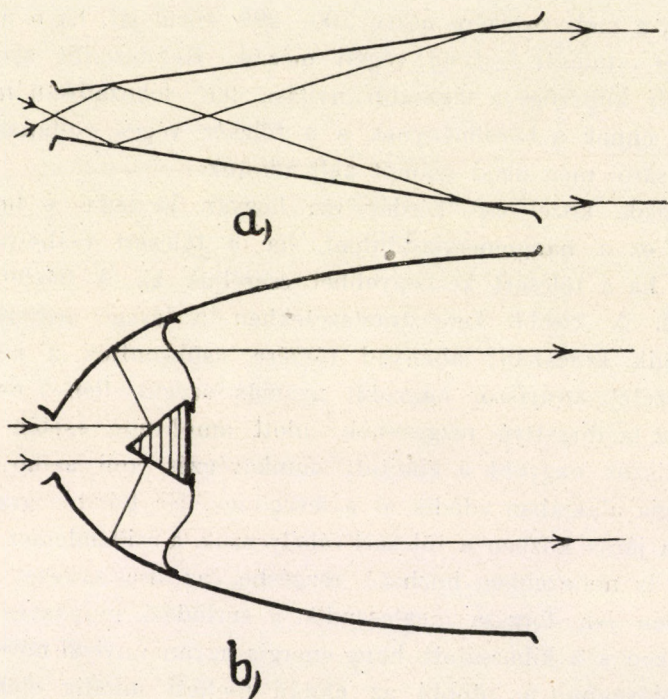
Másik, közel eső kérdés az, hogyan jó létre s honnan ered ez a hang-energia-többlet, ha a tölcsért reáhelyezzük, vagy ha a tölcsért keskenyebbel cseréljük ki. A felelet egyszerű. A kisebb keresztmetszetekben a levegő nehezebben áramlik keresztül; ahányad részére csökkentjük a keresztmetszetet, annyi-szor nagyobb nyomás szegül ellen a csillámlemez (a dugattyú) rezgésének: adott amplitudó esetén tehát annyi-szor nagyobb a kifejtett munkavégzés, ami aztán hang-energia alakjában adódik át a levegőnek. Ha tehát a grammofonra járás közben a tölcsért ráhelyezzük, a csillámlemez, tehát a tű is nehezebben hozható rezgésbe, az óraszerkezet nehezebben jár, forgása meglassodik, a surlódási munkaveszteség csökken s a kibocsátott hang-energia ugyanannyival növekszik. A valóságban az utóbbi az előbbi mellett mindig elenyésző csekély lévén, a tölcsér ráhelyezésének ez a hatása természetesen egyáltalán nem figyelhető meg.

Ellenben nagyon kézzelfogható módon tapasztalhatjuk azt a nagy nyomás-szükségletet, a mi a kúpos levegő-oszlop rezgésbe hozásához kell, mikor trombitát akarunk megfújni s méertjük azt is, hogy a trombita ennek megfelelő erős hangot ad, annál erősebbet, minél fokozatosabb a távolása.

Megértjük végül a mechanizmusát a szótölcsérnek is, aminőt például a hajósok használnak, hogy nagy távolságból megértés-



sék egymást. Ezt ép oly hamis módon, a hang-sugarak visszaverődésével szokták magyarázni s e magyarázat szemléltetésére ma is megtaláljuk elemi fizikai tankönyvekben az itt reprodukált ábrát (2a). Hogy *hangsugarakról* s *szabályos visszaverődésről* beszélni a hang-hullámokkal egyenlő nagyságrendű méretek esetén képtelenség, arra elegendő reámutatni.



2. ábra.

Ennek az általánosan elterjedt téves felfogásnak elriasztó produktuma gyanánt említhetem fel a 3b ábrán látható szótölcsért, a melyet egyik tűzéségi megfigyelő-helyünk requisitumai között találtam. A tölcser forgási-paraboloid alakú s a belsejében egy kis bádoggúp van elhelyezve, hogy a paraboloid csúcsán lévő nyíláson belépő «hangsugarak» azon úgy verődjenek vissza, mintha a paraboloid gyújtópontjából jöttek volna



s aztán másodszori visszaverődés után párhuzamos hang-nyaláb formájában terjedjenek tovább.

Mondanom sem kell, hogy ez a szépen kieszelt szerszám sokkal silányabban működik a közönséges szó-tölcsérnél. Mert ez utóbbinak hatásossága legnagyobbbrészt éppen abból ered, hogy a keskeny tölcsérrel a szájunk előtt nagyobb megerőltetéssel ugyan, de tényleg sokkal erősebb hangon tudunk kiáltani, mint a nélkül.

A mellett persze irányító hatása sem elhanyagolható: a hang valóban a tölcsér tengelye irányában a legerősebb. Erre az irányító hatásra vonatkozólag is egyszerű megfontolásokkal egészen érdekes megállapításokhoz juthatunk. Mindenekelőtt beláthatjuk, hogy a *végtelen* hosszú tölcsér követelését minden további következmény nélkül elhagyhatjuk s beérhetjük olyan hosszú tölcsérrel, a melynek nyílása a hang hullámhosszának már tetemes számú többszöröse. Valóban, ennek az esetnek tökéletes analogonja az, mikor a pontszerű fényforrás fénye valamely, a hullámhosszhoz képest nagy környíláson halad keresztül: a széleken történő elhajlástól eltekintve, a nyíláson élesen határolt fény-kúp lép ki. Úgy is fejezhetjük ezt ki, hogy egy gömbhullámnak a hullámhosszhoz képest nagy méretű darabja (vagyis a mely tetemes számú FRESNEL-féle elemi övet tartalmaz), mint olyan változatlanul terjed tova. S ugyanez a következtetés áll természetesen a hanghullámokra is. A szóbanforgó tölcsérrel tehát tökéletes irányítást érhetünk el: a hang, mint élesen határolt kúp terjed tova s a kúpon kívül a hangból semmit sem hallani.

Ha a tölcsért rövidebbre vesszük, a környíláson történő elhajlási jelenségek lépnek fel, a tölcsér tengelye körül szimmetrikus, kifelé rohamosan ellaposodó maximumokkal s teljes minimumokkal. A hallhatóság határát ebben az esetben az első minimummal azonosíthatjuk, mint a hogy a fénytannban az elhajlási korongot az első minimumig számítják. Minél rövidebb a tölcsér, azaz minél kisebb a tölcsér nyílása, annál messzebbre távozik ez a minimum a tengely irányától; végül ha a nyílás



csupán hullámhossz-nagyságrendű (vagy éppen kisebb), a minimum egészen eltűnik, a hang betölti az egész teret, de az intenzitás a tengely irányában még mindig maximális marad.<sup>1</sup> Ezt a viselkedést mutatja a szócső és a grammofontölcsér hangja is.

De a tölcser rövidítésével az irányító hatás csökkenésén kívül még egy jelenség halad párhuzamosan: a tölcser szabad végén mindig erősebb *visszaverődés* lép fel. A két jelenség közti okozati összefüggést ismét minden számítás nélkül is követhetjük. Mert ha a kilépő gömbhullám-darab szétszóródását úgy tekintjük, mint nagyobb nyílásszögben való tovaterjedést, akkor rögtön alkalmazhatjuk fentebbi eredményünket, mely szerint a nagyobb nyílásszögben terjedő hullám kevesebb energiát visz magával; a maradék-energia, a mit ez a szabad levegőbe kilépő hanghullám nem visz magával, kell, hogy a *visszaverődött* hangban jelentkezzen. Ezt az eredményt még így is kifejezhetjük: a hullámzó mozgás energia-átvitele valamely keresztmetszeten át egyenlő az illető keresztmetszetben történő munkavégzéssel, azaz az erő és elmozdulás szorzatának időbeli integráljával. *Visszaverődés* áll elő, ha valamely keresztmetszet az odaszállított energiát nem tudja továbbítani; a *zárt* végén tehát azért, mert ott az *elmozdulás* zérus, *nyitott* végén, mivel a legyőzendő *erő* (a külső levegő ellenállása) zérus (illetve igen csekély). S így érthető, hogy a tölcser rövidítésével azaz a kilépő hullám szétszóródásával a visszaverődő hullám folyton erősödik, a tölcserben álló-hullám jön létre: a hang-tölcsérből *nyitott, kúpos síp* lesz.

S most ismét visszatérhetünk a grammofontölcsérhez. Ennek szerkesztésénél éppen ez az, a mit lehetőleg el kellett kerülni. Mert a kúpos sípnek megvannak a saját-hangjai, a mikre rezonál s a miket erősít, másokat viszont gyengít; végeredményben tehát a hanglemezt eltorzítva adja vissza. A töl-

<sup>1</sup> A hullámhossznál kisebb nyílás esetén a levegőben terjedő hullám közelítőleg azonos az egyszerű oscilláló gömb által keltett hullámmal: az amplitudó a tengely irányától számított szög cosinusa szerint csökken.



csér száját tehát *lehető nagyra* kell készíteni s hogy a hossza mégis szerfelett nagy ne legyen, fokozatosan mind erősebben tágulóra készítik s a szélét még kihajló peremmel is ellátják. Mind a mellett a rezonancia nincsen teljesen kiküszöbölve, nem is lehet a használt méreteknél; tapasztalhatjuk, hogy minden grammofon egyes hangokat túlságos erősen ad vissza, hogy az egész tölcsér rezeg belé. De — mint látjuk — az elmélet igazolja a nagy tölcsérű grammofon fölényét erősség s a reprodukálás hűsége tekintetében a kicsiny tölcsérű vagy az úgynevezett tölcsérnélküli grammofon felett, a melynek a rendesenél kisebb tölcsére magában az óramű szekrényében van elhelyezve s gyengébb hangjával tényleg inkább csak szobai használatra alkalmas.

Emlékezzünk meg végül a hangtölcsér egy háborús alkalmazásáról is. Külföldi lapok nyomán magyar újság is reprodukálta azt a képet, a mint egy francia katona négy darab hangtölcsérből álló készüléken hallgatódzik, hogy az ellenséges repülőgépek közeledését idejekorán, még mielőtt látható vagy pusztá füllel hallható lenne, berregésükről észrevegye. A hangtan reciprocitási tételéből következik, hogy ahányszor erősíti a tölcsér a belé szolt hangot, ugyanannyiszor erősebben hallani is vele a kívülről érkező hangot. Sőt mivel a kibocsátott hang a tölcsér tengelye mentén a legerősebb, a külső hangforrást is akkor halljuk a legjobban, ha a tölcsér tengelye éppen feléje néz. Így hát módunkban van a közeledő repülőgép zaját nemcsak sokkal hamarább észrevenni, hanem még az irányát is meghatározni. Két vagy még inkább három, különböző helyen felállított hangtölcsérrel tehát a helyét is meg lehetne állapítani s ezt az eljárást ugyancsak láthattuk egy külföldi újság képein *ábrázolva*. A gyakorlatban az az eljárás bizonyára éppen oly kevésbé vált be, mint azok a kísérletek, a melyeket nálunk a cs. és kir. katonai műszaki bizottság a hangtölcsérrel ellenséges üteg-állások meghatározása czéljából végzett.

Olasz harcztér, 1917 szeptember hó.

Selényi Pál.

## IRODALOM.

### A drótnélküli telegráfia.

J. ZENNECK: *Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie*. 4. Auflage. Verlag FERDINAND ENKE, Stuttgart, 1916. M 17.

H. REIN: *Radiotelegraphisches Praktikum*. 2. Auflage. Verlag JULIUS SPRINGER, Berlin, 1912. XII+220 lap. M 8.

H. REIN: *Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie*. Nach dem Tode des Verfassers herausgegeben von K. WIRTZ. Verlag JULIUS SPRINGER, Berlin, 1917. XVI+406 lap. M 20.

A drótnélküli telegráfia lényegében a váltakozó áramok egyik alkalmazása. De a nagy rezgésszám sok, fizikailag igen érdekes és fontos jelenségekre vezetett. A nagyon erős és rendkívül gyenge, gyors váltakozású áramok előállítása, kimutatása és mérése pedig a technikát ösztönözte munkára. Az elektromos rezgés és a szorosan vett drótnélküli telegráfia sok kísérleti és elméleti fizikust foglalkoztatott. E kérdések technikai jelentőségéről pedig nem kell hosszasan beszélnünk. Így természetesnek kell találnunk, hogy ezen a téren a fizika és technika régen óhajtott együttműködése valóra vált és olyan eredményre vezetett, amilyent tíz évvel ezelőtt remélni sem mertek. A drótnélküli telegráfia-nak ez a kettős fontossága az irodalomban is visszatükröződik. Különösen az utóbbi években néhány számottevő könyv jelent meg erről a tárgyról. Közülük ZENNECK könyve, mint szerzője mondja, a fizikus álláspontjára helyezkedik. «Gyakran olyan berendezéseket, amelyekben valami új fizikai gondolat rejlik, akkor is leír, ha tudja, hogy a gyakorlatban eddig nem használták, vagy már nem használják.» REIN mint elektrotechnikus tekinti feladatát, vagyis elsősorban gyakorlati szempontból. De mindjárt meg kell jegyeznünk, hogy sem ZENNECK nem hanyagolja el a gyakorlati kérdéseket, sem REIN a fizikai és elméleti alapot. Mindkét könyv díszre lesz a szakirodalomnak, az önálló kutatások terén



is elsőrendű szerzők munkája. ZENNECK műve, mely régebb keletű, a német irodalomban nagy tekintélynek örvend, mint «standard»-művet említik. Valószínű, hogy REIN könyve az elektrotechnikusok körében hasonló szerepet fog játszani.

ZENNECK könyvének első fejezete a *sűrítő áramkörében* keletkező rezgéseket ismerteti. Ha sűrítő két fegyverzete közé szikraközt iktatunk és külső forrásból a szikraköz elektródjai, tehát egyúttal a sűrítő fegyverzetei között elég nagy feszültséget létesítünk, akkor, mint ismeretes, a kisülés oszcillatorius, hacsak az áramkör ellenállása bizonyos értéken alul marad (W. THOMSON, kevéssel utóbb tőle függetlenül KIRCHHOFF). A teljes rezgésidő:  $T = 2\pi \sqrt{LC}$ ,  $L$  az áramkör önindukciós együtthatója,  $C$  kapacitása (THOMSON-KIRCHHOFF-féle egyenlet). Rövid leírását kapjuk azoknak az eszközöknek, amelyekkel a rezgésszámot meg lehet határozni. Ilyen a forgó tükör (FEDDERSEN), a BRAUN-féle cső és a GEHRKE-féle oszcillográfcső, a rezgések vizsgálatának nélkülözhetetlen eszközei. Tudjuk, hogy az elektromos rezgések csillapíthatatlanok vagy csillapítottak. ZENNECK röviden a csillapodás okait és mértékét is tárgyalja. Ilyen okok a JOULE-féle hő, a szikraellenállás, amely itt nagyobb figyelmet érdemel, a sűrítő szigetelő rétegében keletkező energia-veszteségek, a sűrítő szélén fellépő kisülés és a környező vezetőkben keltett örvényáramok.

A sűrítő áramkörében rendszeren önindukciós tekercs is van. Az egymásután kapcsolt sűrítő, önindukció és szikraköz a *zárt oszcillátor*. A szikraköznek csak az a szerepe, hogy az áramkör addig, míg a feszültségkülönbség a fegyverzetek között elég nagy értéket el nem ért, nyitva maradjon. Amint a szikra átüt, a szikraköz vezető lesz. A zárt oszcillátorban az áram stacionerszerű, az áram erőssége minden pontban oszcillatoriusan változik és a vezeték minden pontjában megegyező értékű. Nem így a *nyílt oszcillátor*-ban (II. fejezet), melynek lényege egyszerű kifeszített drót, közepén szikraközzel. A szikraköz két elektródja a külső áramforrással érintkezik. Az áramerősség minden pontban oszcillatorius, de az amplitudó közepén legnagyobb, a szélek felé csökken. a két végpont pedig az áramerősség csomópontja, itt az áramerősség állandóan 0. Ettől jól meg kell különböztetni a feszültség változását a vezető mentén. A feszültségnek közepén van csomópontja, a szélek felé az amplitudó növekszik. A drótnélküli telegráfiában fontos az a nyílt oszcillátor, melyben a vezeték egyik fele hiányzik és a szikraköznek szabadon maradó elektródját a Földdel kötjük össze. Ha a talaj jó



vezető, a megmaradó ágba az áramerősség és feszültség eloszlása az előbbi Alapvető fontosságúak HERTZ-nek a nyílt oszcillátor elektromos terére vonatkozó vizsgálatai. Az erővonalak nem mind veszik körül a vezetőket, hanem egy részük rezgés közben «leválik», vagyis a vezetéken kívül önmagában záródik. Ezek az erővonalak a térben a fény sebességével terjednek.

Az oszcillátorok egyes részeit, az ellenállást, önindukciót és kapacitást, a drótnélküli telegráfia különleges céljainak megfelelően kell be rendezni. A III. fejezet az eszközök készítésének alapelveit írja le és mindegyik alakot néhány példán bemutatja. Csak egy legutóbbi, érdekes mozzanatról akarok pótlólag megemlékezni. Az induktív ellenállás csökkentése végett a tekercseket legtöbbnyire nem tömör drótból vagy csőből készítik, hanem külön-külön elszigetelt, vékony szálakat fontak össze. LINDEMANN (hősi halált halt) kimutatta, hogy nagy rezgésszámnál a tömör drót esetleg előnyösebb, mint a fonott szál, mert a szálak szigetelésében nagyobb energiavesztés lép fel, mint a tömör drótban bőrhatás (skineffectus) folytán. A drótnélküli telegráfiaiban hengeres vagy lapos tekercseket használnak, de mindig csak egy réteggel, mert az egymás felett levő rétegek között nagy feszültségekülönbség léphet fel és ez a szigetelőben jelentékeny energiavesztéseket okozhat. A sűrítők közül a lemezes kondenzátor és a leydeni palaczk egyaránt használatosak. A leydeni palaczkok magasak és keskenyek, mert ezáltal a széleken előálló kisülés kevésbé hátrányos. A változó kapacitású sűrítők lényege az, hogy a két fegyverzet közül az egyiket elmozdíthatjuk. A kapacitás arányos a fegyverzetek egymás fölé eső részének területével. Az áramerősség mérése kettős feladat elé állította a technikát. A nagyon gyenge áramok mérésére azelőtt is többféle módszert használtak. Erős áramokat legtöbbnyire hődrótos eszközökkel mérnek, de a drótnélküli telegráfia e tekintetben is termékenyítőleg hatott. A régi eszközökkel csak 5—10 ampère-ig lehetett ilyen nagy rezgésszám mellett elég pontosan mérni. A mai HARTMANN és BRAUN-féle hődrótos eszközök 500 ampère-ig, sőt tovább is használhatók.

A drótnélküli telegráfiaiban MARCONI első rendszere után már nem nyílt oszcillátor keltette a hullámokat, hanem *kapcsolt rendszer*. Két oszcillátort akkor mondunk kapcsoltnak, ha az egyik rezgései a másikban is rezgéseket keltenek. A bennök végbemenő jelenségeket ZENNECK könyvének IV. fejezete ismerteti. A kapcsolás háromféle lehet. Mágneses



vagy induktív akkor, ha az egyik oszcillátor váltakozó árama indukció folytán kelt rezgéseket a másik oszcillátorban. Az oszcillátorok egymásra hatását a mágneses tér közvetíti. A közvetlen vagy galván kapcsolás akkor áll elő, ha a szekunder oszcillátor önindukciója egészen vagy részben a primer oszcillátorban is benne van. A két áramkört tehát vezeték köti össze. Ha a két oszcillátornak közös sűrítője van, akkor a kapcsolás elektromos. A gyakorlatban főleg az első kettő szerepel. A kapcsolt rendszerekben előálló viszonyok lényegesen függenek a kapcsolás fokától. A szekunder kör u. i. visszahat a primerre. Ha a visszahatás erős, akkor a kapcsolást szorosnak mondjuk. Ha pedig a szekunder kör alig befolyásolja a primert, akkor a kapcsolás laza. A drótnélküli telegráfia szoros kapcsolásra törekszik, mert ekkor a primer áram energiájának nagyobb része jut a szekunder körbe, a mely kisugároz. A kapcsolás fokát a *kapcsolási együttható* fejezi ki:

$$K = \sqrt{\frac{L_{12}^2}{L_1 L_2}},$$

$L_{12}$  a két kör kölcsönös indukciójának együtthatója,  $L_1$  és  $L_2$  a két kör önindukciója. Szoros kapcsolásnál mindkét oszcillátorban két rezgés keletkezik. Ezek a *«kapcsolási hullámok»* különböznek a két rezonáló kör közös hullámától. Ha  $\lambda$  az áramkörök saját hullámhossza, akkor a kapcsolási hullámok:

$$\lambda_1 = \lambda \sqrt{1 - K} \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \lambda \sqrt{1 + K}.$$

A saját hullámhossz a két kapcsolási hullámhossz közé esik. A rezgések eredőjeként mindegyik oszcillátorban az áramerősség lebegésszerűen változik. Mikor az egyik áramkörben a lebegés minimuma van, a másikban az áramerősség legnagyobb. Az elektromos energia váltakozva az egyik oszcillátorból a másikba áramlik. A IV. fejezet utolsó részében találjuk a ma leginkább elterjedt rendszernek, a *lökésszerű indításnak* alapját. Szakítsuk meg a primer oszcillátor szikráját abban a pillanatban, a mikor a lebegésnek első minimuma van. Ekkor minden energia a szekunder körbe ment át. Minthogy a primer kört megszakítottuk, az energia nem áramlik vissza, a szekunder kör magára marad, csakis saját rezgését végzi. A megszakítást maga a szikra eszközli. WIEN szikraközének ezüst- vagy réz-elektrodjai igen közel voltak egymáshoz. Mikor a lebegés minimuma bekövetkezik, a szikraköz ionozása megszűnik, a



szikra megszakad. Ez a *kioltó szikraköz*. ZENNECK jól összefoglalja a *tiszta kioltó hatás* feltételeit. A kioltó hatás akkor tiszta, ha a szikra a lebegés első minimuma idején valóban megszakad. Ellenkező esetben több lebegés következik és a szikra csak a második vagy harmadik lebegés minimumában szakad meg.

Bármilyen rendszer rezgéseinek elemzésénél jó felvilágosítást ad a *rezonancia-görbe*. Erről szól az V. fejezet. A vizsgálandó oszcillátor mellé állítsunk szekunder orszcillátort, melynek rezgésszámát változtatjuk. Olvassuk le a szekunder körben az áramerősség négyzetét. Mint ismeretes, a váltakozó áramú ampèremeterek kitérése az áramerősség négyzetével arányos. Mérjük fel derékszögű koordináta-rendszerben abszcissza gyanánt a szekunder kör rezgésszámát, ordinátául pedig az áramerősség négyzetét. Az így nyert görbe az áramhatás rezonancia-görbéje. Ha az oszcillátorban egyetlen rezgés keletkezik, akkor a görbének egy maximuma van, ez pedig akkor áll elő, ha a mérőkör a vizsgált körre rezonál. A lebegéseket úgy ismerjük fel, hogy a rezonancia-görbében két maximum van, t. i. a kapcsolási hullámok rezgésszámának helyén. A rezonancia-görbe ennél fogva a kioltás tisztaságát is mutatja. Rezonancián alapszik a hullámhosszmérő. Ez zárt oszcillátor, melynek vagy önindukciója, vagy kapacitása változó. A mérendő rezgésszámú oszcillátor mellé állítjuk és rezgésszámát addig változtatjuk, míg az áramhatás a legnagyobb, vagyis a két kör rezonanciában van. A készülék osztályzatán a hullámhosszat leolvashatjuk. A legtöbb hullámhosszmérővel egyúttal a csillapodást is meg lehet mérni, mert ez is rezonancián alapszik. A rezonanciának még egy másik alkalmazásával is megismerkedünk: a görbe menetéből következtetni lehet a sűrítők viselkedésére. Ha például a rezonancia-görbe a maximum két oldalán nem szimmetrikus, akkor a sűrítő szélén káros kisülés van.

Az eddigi öt fejezet mintegy alapja a drótnélküli telegráfának és főleg a rezgésekről szól. Ezekkel bővebben foglalkozik ZENNECK régebbi könyve: *Elektromagnetische Schwingungen u. drahtlose Telegraphie*, Stuttgart 1905. A jeladó és felvevő rendszerekkel a következőkben ismerkedünk meg.

A hullámokat a *légvezeték*, *antenna*, sugározza ki, miután benne elektromos rezgéseket keltettünk. Az antennák különböző alakjait és a bennük keletkező rezgéseket a VI. fejezet írja le. Minden antenna lényegében nyílt oszcillátor, melynek egyik felét földeléssel vagy nagy kapa-



vezetősé, az ellensúllyal helyettesítjük. Ha az antennát a kívánt hullámhosszra akarjuk beállítani, akkor tekercset vagy sűrítőt kapcsolunk bele. A tekercs a hullámhosszat megnöveli (meghosszabbító tekercs, hangoló tekercs), a sűrítő pedig megrövidíti.

A kibocsátott hullámok csillapítottak vagy csillapíthatlanok. A csillapított hullámokat kibocsátó *jeladókat* a VII. fejezet tárgyalja. Az egyszerű MARCONI-féle jeladónál a szikraköz magában az antennában van. Csak-hogy ilyen módon nem lehet elég erős hullámokat kelteni, mert az antenna kapacitása kicsi. A feszültség növelésével csak bizonyos határig érünk célzt, mert az antennából a töltés egy része a levegőbe szil ki. Mikor a feszültséget bizonyos értéken túl fokozzuk, a rezgések már nem lesznek erősebbek, csak a kisülés alakjában előálló veszteség növekszik. Azonkívül a MARCONI-féle jeladó hullámai nagy mértékben csillapítottak, ilyen hullámokkal pedig nem lehet éles rezonanciát előállítani. BRAUN kevésbé csillapított és erős hullámokat *kapcsolt rendszerű jeladójával* tudott kelteni. Az áramforrás segítségével zárt oszcillátort rezgésekre indít, ezek pedig a zárt oszcillátorral kapcsolt antennában keltenek rezgéseket. A zárt és nyílt oszcillátor között u. i. több tekintetben lényeges különbség van. A zárt oszcillátorban a sűrítő kapacitása nagy, tehát elég erős rezgéseket lehet benne kelteni, de erővonalak alig hagyják el. Az elektromos tér majdnem kizárólag a sűrítő szigetelő rétegére szorítkozik, a mágneses tér pedig az önindukció környezetére. Az elektromos és mágneses energia váltakozva átalakul egymásba. Csak szóródás folytán lép a térbe aránylag kevés erővonal. A nyílt oszcillátor ellenben, mint láttuk, nem alkalmas arra, hogy benne közvetlenül erős rezgéseket keltsünk, de az energiát kisugározza. BRAUN ezért zárt oszcillátorban erős rezgéseket keltett, az energiát átvitte a nyílt oszcillátorba és ebből kisugározta. Csakhogy ez a kapcsolt rendszer két hullámot kelt, holott a felvevőben csak az egyiket foghatjuk fel, a másik energiája kárba vész. De ha a zárt oszcillátorban kioltó szikraköz van, akkor a vele kapcsolt antenna egyetlen rezgést végez. A gyakorlat számára ezt a rendszert a Telefunken-társaság (gróf ARCO) dolgozta ki. A gyors kioltó hatás lehetővé tette, hogy a kisülések számát 1000-ig fokozzák. Közöséges szikraköz két, ilyen gyorsan egymásután következő szikra között nem veszítené el vezetőképességét, ívfény keletkeznék benne. Valahányszor a kioltó szikraközben kisülés keletkezik, az antennából kis csillapodású hullámcsoport indul ki. A felvevőben



minden ilyen csoport a telefonlemez egy rezgésre indítja. A kisülések számának czélszerű megválasztása folytán a telefon zenei hangot kelt, azért ezt a rendszert *zenei hangzásúnak* nevezzük. Ennek többféle előnye van. Az állomást kétféleképpen lehet hangolni, t. i. a kapacitás és önindukció segítségével az elektromos rezgésszámot választhatjuk meg, a kisülések száma pedig a hang magasságát határozza meg. Ezáltal az állomások egymást kevésbé zavarják és a jeleket jobban lehet védeni idegen állomásokkal szemben. A másik előnye e rendszernek az, hogy a légköri zavarok ellen nagyobb védelmet nyújt. A levegőből ugyanis gyakran jutnak az antennához elektromos hullámok és a telefonban zörejt keltenek. Ez persze zavarja a jelek átvételét. De a zenei hangot a zörejekeken keresztül jól lehet hallani. WIEN óta a kioltó szikraközöknek hosszú sorozatát ismerjük. MARCONI jelenleg mechanikus kioltást használ. A szikraköz egyik elektródja forog és így a szikra az elektród eltávolítása folytán szakad meg. ZENNECK összehasonlítja az egyszerű és kapcsolt rendszereket, továbbá a BRAUN- és a WIEN-féle jeladót. Részletesen tárgyalja az áramforrás megválasztását is.

Csillapítatlan hullámokat többféle eljárással kelthetünk. A VIII. fejezet a *generátorokat* ismerteti. ALEXANDERSON a váltakozások számát közvetlenül fokozza a gép czélszerű berendezésével. GOLDSCHMIDT magában a gépben levő sűrítőkörökkel alakítja át a váltakozó áramot nagy rezgésszámúvá. Az utóbbi időben biztató eredményt értek el a *rezgésszám transzformálásával*. A gép aránylag kevés váltakozású áramot termel és ezt kívül alkalmas transzformátor segítségével magasabb rezgésszámúvá alakítják.

Másik eljárás csillapítatlan rezgések keltésére a *Poulsen-féle ívlámpa* (IX. fejezet). POULSEN az ívet hidrogén-környezetben kelti, mágneses térbe állítja, a pozitív elektródot rézből készíti és jól hűti. Részletes felvilágosítást kapunk mindezen tényezők szerepéről és az ívlámpában előálló rezgésekről.

A levegő és talaj befolyását a terjedő elektromos hullámokra a X. fejezet tárgyalja. ZENNECK felfogása szerint az elektromos hullámok nemcsak a térben keletkeznek, hanem a Föld felületén is haladnak «felületi hullámok». A térbeli hullámok erőssége a távolság négyzetével fordítva arányos, ellenben a felületi hullámoké magával a távolsággal. Nagyobb távolságban tehát esetleg a felületi hullámok hatása túlnyomó. Az elektromos hullámok erősségét a levegő állapota és a talaj minősége is befolyásolja.



A *detektorok* leírását és működésük magyarázatát a XI. fejezetben kapjuk. Az eleinte használt koherert előbb a mágneses detektor váltotta fel, ma leginkább azokat a detektorokat használják, amelyek az érkező hullámok energiáját összegezik és erre az energiára szólnak meg. Ilyen az elektrolitikus, kristály- és gáz-detektorok sokféle faja. Itt találjuk a hangerősítők leírását. Ezeknek az a céljuk, hogy a felvevő-állomás telefonjában erősebb hang keletkezzék. Evégett az érkező gyenge rezgéseket helyi telep és hangerősítő segítségével erősítik. Röviden megismerjük a jelek leírására szolgáló eszközöket és a felhívót, amely a jelek érkezését csengővel jelzi.

Rövid általános bevezetés után a *felvevők* leírása következik (XII. fej.). A MARCONI-féle egyszerű felvevő a jeladó tükröképe, a szikraköz helyét a koherer foglalja el. A BRAUN-féle jeladóval egyidejű a kapcsolt rendszerű felvevő a kevésbé csillapított hullámok átvételére. Itt az antenna a primer oszcillátor, a melyben az érkező hullámok rezgéseket keltenek. Ezek a rezgések hatnak a detektor körére. Különös figyelmet fordít ZENNECK a hangolás élességének és a légköri zavarok elkerülésének tárgyalására. Csillapítatlan hullámok átvételénél a detektor helyére a tikkér lép.

A drótnélküli telegráfia fejlődésének utolsó mozzanata az *irányítás* (XIII. fej.), melynek az a célja, hogy az elektromos hullámok meghatározott irányban erősebben terjedjenek, mint más irányban. Viszont az irányított felvevő bizonyos irányból érkező hullámokat legerősebben jelez. A kezdetleges kísérletek után nagyobb jelentőségű a kettős antenna, midőn egyszerre két antenna sugároz ellenkező fázissal. Ebből fejlődött a BELLINI-TOSI-féle rendszer. MARCONI irányításra meghajlított antennát használ, alacsonyabb függőleges ág hosszú vízszintes ágban folytatódik. A vízszintes ág irányában van a kíválságos irány. Ehhez kapcsolódik a vízszintes antenna és az utóbbi időben nagyobb feltűnést keltő földantenna leírása. A jelenségek magyarázata mindenütt gondos és alapos.

Aránylag rövid fejezet a *drótnélküli telefonról* szól és pedig első része a jeladóról, második része a felvevőről. A jeladó a drótnélküli telegráf módszerével állandóan csillapítatlan hullámokat bocsát ki. Az antennában még mikrofon is van. Mikor rábeszélünk, árama a csillapítatlan rezgések fölé helyezkedik. A felvevő alig különbözik az előbbtől.

Az újabb kiadás külön fejezetben szól pótlólag a gázdetektorok ha-



ladásáról, velük kapcsolatban a hangerősítésről, továbbá az interferencia-felvételt tárgyalja. Az utóbbival csillapítatlan hullámok felvételénél is zenei hangot lehet elérni. A felvevő antennában az érkező rezgéseken kívül második rezgést keltenek és így lebegés keletkezik, amely a telefonban zenei hangra vezet.

Ki kell emelnünk ZENNECK könyvének világos előadását és rendkívül áttekinthető beosztását. A bő irodalmi jegyzék nagyban növeli a könyv értékét.

*Rein Praktikum*a elsősorban a drótnélküli telegráfiában szokásos méréseket és eszközöket ismerteti. A sűrítők kapacitásának mérésére többféle módszert találunk. A gyakorlatban fontos a tekercsek, ellenállások, vezetékek, szigetelők és detektorok kapacitása. Részletesen találjuk az önindukció, kölcsönös indukció és kapcsolási tényező mérésének módszereit. A hullámhosszmérőkről szóló fejezet néhány eszköz, osztályozásukat és használatukat írja le. Evvel összefügg a csillapodás mérése, amely szigetelők csillapodására, a vasban szenvedett veszteségekre, tekercsek ellenállására, szikraközök, antennák, zárt oszcillátorok és kapcsolt rendszerek csillapodására terjed ki. A következő rész a hullámkeltő módszerekkel kapcsolatban a hatásfok mérését, majd a rezonanciagörbe felvételét és alkalmazását tárgyalja. A felvevő állomáson végzett mérések körében először a különböző árammérő eszközöket és osztályozásukat ismerjük meg, majd az egyes detektorok vizsgálatának módszereit. Az utolsó részlet általánosabb szempontokat vet fel: hogyan kell felépíteni a jeladó- és felvevő-állomást, hogy a hatástávolság legnagyobb és a rezonancia legélesebb legyen. Néhány különleges szerkezetű állomás leírása és a drótnélküli telefonnak úgyszólván csak megemlítése zárja be a könyvet.

REIN *Lehrbuch*-ja a Praktikumhoz fűződik. Kiterjeszkedik a drótnélküli telegráfia egész rendszerére, de a méréseket mellőzi, az eszközök leírásában csak pótolja a Praktikumot. Az egész könyvön gyakorlati szellem vonul át. A kérdéseket úgy teszi fel, ahogyan a gyakorlatban felmerülnek, elméleti részeinek az a célja, hogy a gyakorlat kérdéseiben útbaigazítsanak. Majdnem kizárólag a jelenlegi viszonyokra szorítkozik, így a koherert csak éppen említi.

A bevezetés röviden tárgyalja a rezonanciát, rezonancia-görbét, csillapodást és kapcsolást. Az első fejezet az állomás részeit írja le. A sűrítőket céljuknak megfelelően csoportosítja, t. i. külön szól a jel-



adó- és felvevő-állomás sűrítőiről. A jeladó-állomás sűrítőinek elsősorban nagy feszültséget kell kibírniuk, a felvevő-állomás sűrítőinél pedig különösen az energia-vesztést kell kerülni, mert a felvevőhöz úgyszólván kevés energia jut. Meg kell említenünk a tekercsek kapacitásának rövid, de szép tárgyalását. A hullámhosszmérők fejtegetésénél tanulságos az általános szempontok kijelölése. Az antennák tárgyalását a nyílt oszcillátorok és a MARCONI-féle egyszerű antenna bővebb ismertetése vezeti be. Az egyes antennákról külön szól, megemlíti előnyüket és hátrányukat, végül összehasonlítja őket. A legfőbb kérdés a kisugárzott energia mennyisége. Érdekes gyakorlati részleteket tudunk meg az árboczok tárgyalásából. Az oszcillátorok feltöltésének módjai után ezen a helyen ismerteti REIN a szikraközöket. A ki a Praktikum nélkül olvassa a Lehrbuch-ot, az a kioltó szikraközök itteni leírását valószínűleg korainak fogja érezni.

A második fejezet a jeladó rendszerekkel foglalkozik. A mechanikus kioltást mai jelentőségének megfelelően részletesebben tárgyalja, mint ZENNECK, viszont jóval rövidebb az ívfény jelenségeinek tárgyalása. Míg ZENNECK a *többszörös hangzású rendszert* csak lényegében érinti, REIN részletesen ismerteti. Ennek a rendszernek az a célja, hogy a zenei hangot gyorsan és kényelmesen változtatni lehessen. Ezáltal a jeleket még jobban megvédhetjük idegen állomásokkal szemben. A kioltó szikraközzel párhuzamosan önindukciót és sűrítőt kapcsolnak úgy, hogy ennek a zárt oszcillátornak, az úgynevezett hangkörnek, rezgésszáma a hangrezgések körében maradjon. Ennek rezgései az első zárt oszcillátor rezgései fölé helyezkednek, a hullámok a hangkör rezgéseinek megfelelő periódusokban indulnak ki. A hang magasságát a hangkör önindukciójával lehet szabályozni.

A gyors váltakozású gépek közül azokat találjuk, a melyek a gyakorlatban szerepeltek: röviden az ALEXANDERSON-féle gépet, bővebben a GOLDSCHMIDT-félét, a rezgésszám transzformálásában pedig JOLY módszerét.

A felvevő-állomás tárgyalása részletes elméleti fejtegetésekkel kezdődik. Lépésenként ismerjük meg azokat az elveket, amelyek a felvevő építésénél irányadók. Az első kérdés az, mi a feltétele annak, hogy a detektorhoz jutó energia maximum legyen. Ez a rész a jeladóra még nincs tekintettel. A második rész a felvevő elmélete a jeladó figyelembevételével. Együttal az a kérdés is fellép, hogy a jeladó antenna által



kisugárzott energiának hányadrésze jut a felvevő antennához. Tanulságos a csillapított és csillapítatlan hullámok összehasonlítása. Ha a jeladó ugyanavval a hullámhosszal egyenlő energiát sugároz ki, akkor csillapítatlan rezgések esetében a detektorhoz több energia jut. Eddig bajos volt csillapítatlan rezgéseket nagy energiával kelteni, de ma már a generátorok módszere annyira fejlődött és egyszerűségével, üzembiztonságával és a termelhető energia nagyságával annyi előnyt biztosít, hogy főleg nagy állomások berendezésénél szép jövője van. Végül azokat a szempontokat ismerjük meg, a melyekre a hangolás élessége végett ügyelni kell.

Azoknak a hatásoknak, a melyek a hullámokat terjedésük közben érik, REIN túlságosan kevés teret szán. Az utolsó években nagy gondot fordítottak a légköri zavarok természetének és a hullámok terjedésének vizsgálatára. REIN talán azért mellőzi ezeket a kérdéseket, mert végleges tisztázásuk még hátra van.

Az általános fejtegetéseket a felvevő egyes részeinek leírása követi. A detektorok közül csak a valóban használtakra szorítkozik. A gázdetektorok tárgyalása indokolatlanul rövid (10 sor). Egyes alakjai főleg Amerikában nagy szerepet játszanak, mint az audion, ultraudion, pleiotron stb., ezeknek nevét sem találjuk. Nagyon rövid a detektorok működésének ismertetése is. Külön kis fejezet szól azokról az eljárásokról, a melyekkel a felvevőt meg lehet védeni idegen állomások zavaró hatása ellen és a légköri zavarok ellen.

Az utolsó két fejezetet REIN nem dolgozhatta ki, mert 1915 ápr. 11-én Verduntól keletre elesett. Könyvének befejezését K. WIRTZ vállalta magára. Ő írta meg a drótnélküli telefonról és az irányításról szóló fejezeteket. Az utóbbi nem olyan részletes, mint ZENNECK könyvében, csak a kettős antennára és a MARCONI-féle meghajlított antennára terjeszkedik ki. Elég részletes forrásjegyzék egészíti ki a könyvet.

Tárgyalása szintén világos és áttekinthető. E mellett igen előnyös a szöveget magyarázó sok numerikus példa. REIN az eredményeket sűrűn összefoglalja, a lényegyet mindenütt kiemeli. Meg kell még említenünk mind a három könyv mintaszerű kiállítását.

*Mende Jenő.*



# MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

E folyóirat évenként 8, legalább három (nyolc) füzetben jelenik meg, a nyolc hónapok kivételével, a hó második felében.

Előfizetési díj egy évre 10 K  
A Matematikai és Fizikai Társulat tagjai a folyóiratot tagsági díjuk fejében kapják.

26. évfolyam.

1917. nov.—decz.

7—8. füzet.

## AZ ALAPEGYENLET ELMÉLETÉHEZ.

### 1. §.

1. Legyen  $K$  egy  $n$ -edfokú algebrai számtest. Ha az  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  egész számok a számtest alaprendszerét képezik és  $t_1, t_2, \dots, t_n$  határozatlanokat jelentenek, akkor a

$$\tau = t_1\omega_1 + t_2\omega_2 + \dots + t_n\omega_n$$

forma a számtest alapformája és az

$$F(x; t_1, t_2, \dots, t_n) = N(x - \tau) = 0$$

egyenlet a számtest alapegyenlete. HENSEL<sup>1</sup> bizonyította be először teljesen a következő alapvető tényt. Ha a  $K$  testben a  $p$  törzsszámra vonatkozólag

$$p = \eta_1^{q_1} \dots \eta_k^{q_k},$$

a hol  $\eta_i$  különböző  $f_i$ -edfokú törzsideálokot jelent, akkor

$$F(x; t_1, t_2, \dots, t_n) \equiv P_1^{q_1}(x; t_1, t_2, \dots, t_n) \dots P_k^{q_k}(x; t_1, t_2, \dots, t_n) \pmod{p} \quad (I)$$

E formulában  $P_i \pmod{p}$  különböző egyszerű<sup>2</sup> és irreducibilis  $f_i$ -edfokú polynomokat jelent. Az (I) felbontás egyértelmű. A következő sorokban megmutatom, hogy  $F(x; t_1, t_2, \dots, t_n)$  a  $p^\alpha$ ,  $\alpha > 1$  modulusra nézve is egyértelműen állítható elő, mint

<sup>1</sup> Untersuchung der Fundamentalgleichung einer Gattung usw. Journal f. r. u. a. Math. 113. kötet, 61. old.

<sup>2</sup> Az  $x$  legmagasabb hatványának együtthatója: 1.

egyszerű és  $(\text{mod } p^a)$  irreducibilis polynomok szorzata. Még pedig  $a > 1$ -re

$$F(x; t_1, t_2, \dots, t_n) \equiv Q_{1a}(x; t_1, t_2, \dots, t_n) \dots Q_{ka}(x; t_1, t_2, \dots, t_n), (\text{mod } p^a) \quad (\text{II})$$

a hol  $Q_{ia} (\text{mod } p^a)$  különböző egyszerű és irreducibilis polynomokat jelent, a melyek még a

$$Q_{ia}(x; t_1, t_2, \dots, t_n) \equiv P_i^{q_i}(x; t_1, t_2, \dots, t_n) \pmod{p} \quad (\text{II}^*)$$

$(i=1, 2, \dots, k)$

kongruenciákat kielégítik.

2. Abban az esetben, midőn a  $K$  számtestben bármely  $p$  törzsszám legalább két különböző törzsideállal osztható, a (II)-ből következik, hogy minden

$$f(x) = x^n + \dots + a_n = 0, \quad a_i \text{ rac. egész sz.}$$

irreducibilis egyenletnek, melyet a számtest valamely egész száma kielégít, többtagúja minden  $p^a$  törzsszámhatvány modulusra reducibilissé lesz. Az irreducibilis polynomok ilyen sajátságos viselkedésére először HILBERT<sup>1</sup> hívta fel a figyelmet, a 2. §-ban ilyennemű példákat az ideálmélet alkalmazása nélkül fogunk látni.

3. Valamely az  $x$ -ben egyszerű

$$G(x; t_1, t_2, \dots, t_s) = x^m + A_1(t_1, t_2, \dots, t_s)x^{m-1} + \dots + A_m(t_1, t_2, \dots, t_s)$$

polynomot, melynek együtthatói a  $t_1, t_2, \dots, t_s$  határozatlanok polynomjai, irreducibilisnek nevezünk  $(\text{mod } p^a)$ , ha nem állítható elő erre a modulusra nézve, mint egyszerű polynomok szorzata. Mindenekelőtt a következő segédtelet vezetjük le, mely SCHÖNEMANN<sup>2</sup> egy tételét általánosítja. Ha az  $R_1, R_2, S_1, S_2$

<sup>1</sup> Über Diophantische Gleichungen. Göttinger Nachrichten 1897, 48. old. L. még Zur Theorie der höheren Kongruenzen. Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn XX. k. 39. old.

<sup>2</sup> Von denjenigen Moduln usw. Journal f. d. r. u. a. Math. 32. k. 93. old. 58. §.



polynomok egyszerűek és  $R_1, R_2$  illetőleg  $S_1, S_2 \pmod{p}$  relativ primek egymáshoz, akkor a

$$R_1(x; t_1, \dots, t_s) R_2(x; t_1, \dots, t_s) \equiv S_1(x; t_1, \dots, t_s) S_2(x; t_1, \dots, t_s) \pmod{p^\alpha}$$

$$R_1(x; t_1, \dots, t_s) \equiv S_1(x; t_1, \dots, t_s) \pmod{p} \quad (1)$$

$$R_2(x; t_1, \dots, t_s) \equiv S_2(x; t_1, \dots, t_s) \pmod{p}$$

összefüggésekből következnek a

$$\begin{aligned} R_1(x; t_1, \dots, t_s) &\equiv S_1(x; t_1, \dots, t_s) \pmod{p^\alpha} \\ R_2(x; t_1, \dots, t_s) &\equiv S_2(x; t_1, \dots, t_s) \pmod{p^\alpha} \end{aligned} \quad (1^*)$$

kongruenciák.

Ugyanis

$$\begin{aligned} S_1(x; t_1, \dots, t_s) &= R_1(x; t_1, \dots, t_s) + p^\gamma M_1(x; t_1, \dots, t_s) \\ S_2(x; t_1, \dots, t_s) &= R_2(x; t_1, \dots, t_s) + p^\gamma M_2(x; t_1, \dots, t_s) \end{aligned} \quad (2)$$

a hol  $M_1$ , illetőleg  $M_2$  foka kisebb, mint  $R_1$ , illetőleg  $R_2$  foka.

Ha azt tesszük fel, hogy  $\gamma < \alpha$ , akkor

$$R_1 R_2 \equiv R_1 R_2 + p^\gamma (R_1 M_2 + R_2 M_1) + p^{2\gamma} M_1 M_2 \pmod{p^\alpha}$$

azt adja, hogy

$$M_1 R_2 + M_2 R_1 \equiv 0, \pmod{p}$$

a miből minthogy  $R_1, R_2 \pmod{p}$  relativ primek, az

$$\begin{aligned} f_1(t_1, \dots, t_s) M_1(x; t_1, \dots, t_s) &\equiv 0 \pmod{p, R_1(x; t_1, \dots, t_s)} \\ f_2(t_1, \dots, t_s) M_2(x; t_1, \dots, t_s) &\equiv 0 \pmod{p, R_2(x; t_1, \dots, t_s)} \\ f_1(t_1, \dots, t_s) &\not\equiv 0 \pmod{p}, \quad f_2(t_1, \dots, t_s) &\not\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned} \quad (3)$$

relációk következnek. Ámde  $M_1$ , illetőleg  $M_2$  foka kisebb, mint  $R_1$ , illetőleg  $R_2$  foka és így

$$M_1(x; t_1, \dots, t_s) \equiv 0 \pmod{p}, \quad M_2(x; t_1, \dots, t_s) \equiv 0 \pmod{p}, \quad (3^*)$$

vagyis csakugyan  $\gamma \geq \alpha$ . Segéd-tételünk akkor is érvényes marad, ha az  $R$ , illetőleg  $S$  polynomok száma tetszőleges nagy. SCHÖNEMANN vizsgálataiban a  $t_i$  határozatlanok nem fordulnak elő,

ebben az esetben még a következő tétel is érvényes.<sup>1</sup> Valamely egyszerű és  $(\text{mod } p^a)$  irreducibilis polynom a  $p$  modulus szerint vagy irreducibilis, vagy egy irreducibilis polynom hatványa. Az általános esetben ez a tétel nem érvényes, könnyen meg lehet győződni, hogy

$$G(x; t_1, t_2) = (x - t_1)(x - t_2) + p$$

a  $p^2$  modulusra irreducibilis, habár az  $x - t_1$ ,  $x - t_2$  polynomok  $(\text{mod } p)$  relativ primek egymáshoz.

4. Térjünk vissza az alapegyenlethez. Legyen  $(\text{mod } p)$  egy tetszőleges felbontás irreducibilis tényezőkre

$$F(x; t_1, \dots, t_n) \equiv P_1^{g_1}(x; t_1, \dots, t_n) \dots P_k^{g_k}(x; t_1, \dots, t_n) \quad (4)$$

és legyen

$$F - P_1^{g_1} \dots P_k^{g_k} = pN(x; t_1, \dots, t_n). \quad (4^*)$$

Minthogy a  $p$  törzsszám és a  $P_l(\tau; t_1, \dots, t_n)$  forma legnagyobb közös osztója  $\eta_l$  törzsideál, az alapegyenlet elméletéből következik, hogy

$$N(x; t_1, \dots, t_n) \not\equiv 0 \pmod{p, P_l(x; t_1, \dots, t_n)} \quad (5)$$

ha  $g_l > 1$ . Tegyük már most fel, hogy az  $S(x)$  egyszerű és  $(\text{mod } p^a)$  irreducibilis polynom az  $F(x; t_1, \dots, t_n)$  polynomnak  $(\text{mod } p^a)$  osztója. Meg fogjuk mutatni, hogy a

$$S(x; t_1, \dots, t_n) \equiv 0 \pmod{p, P_l(x; t_1, \dots, t_n)} \quad (6)$$

relációból,

$$S(x; t_1, \dots, t_n) \equiv 0 \pmod{p, P_l^{g_l}(x; t_1, \dots, t_n)} \quad (6^*)$$

következik. Ha ez nem lenne igaz, akkor, minthogy  $(\text{mod } p)$  a felbontások egyértelműek, ilyen alakú összefüggések állanának fenn:

$$g_l = g_{l_1} + g_{l_2}, \quad g_{l_1} > 0, \quad g_{l_2} > 0$$

<sup>1</sup> Idézett helyen 59. §. A levezetés feltételezi az 58. § eredményeit. Megjegyzem, hogy lehetséges a tételt direkte levezetni.



$$F(x; t_1, \dots, t_n) \equiv (P_i^{q_i} \phi_1 + p H_1) (P_i^{q_i} \phi_2 + p H_2) \pmod{p^a},$$

a melyekből

$$F(x; t_1, \dots, t_n) \equiv 0 \pmod{p^2, P_i},$$

$$pN(x; t_1, \dots, t_n) \equiv 0 \pmod{p^2, P_i},$$

$$N(x; t_1, \dots, t_n) \equiv 0 \pmod{p, P_i}$$

következnék, a mi (5)-nek ellentmond.

5. A (II) és (II\*) alatti állítások be lennének bizonyítva, ha ki tudnók mutatni egy bizonyos II. alakú felbontás existenciáját, mely még a (II\*) tulajdonságokkal rendelkezik. Legyen ugyanis

$$V(x; t_1, \dots, t_n)$$

egy tetszésszerű egyszerű és  $\pmod{p^a}$  irreducibilis polynom, mely egy  $\pmod{p^a}$  felbontásban fellép. Az előzők szerint  $V \pmod{p}$  vagy valamely  $P_i^{q_i}$ -vel, vagy több ilyennek szorzatával lenne  $\pmod{p}$  kongruens. Az utóbbi eshetőség a segéd-tétel szerint ki van zárva, csak az első következhetik be. A felbontás egyértelműségének bebizonyítását ismét a segéd-tétel szolgáltatja.

6. A kívánt alakú felbontás létezését most már bebizonyíthatjuk LANDSBERG<sup>1</sup> vizsgálatainak felhasználásával. Legyen  $G$  a  $K$  számtesthez tartozó GALOIS-féle test. Legyen  $G$ -ben

$$p = (\mathfrak{P}_1 \dots \mathfrak{P}_e)^g,$$

hol  $\mathfrak{P}_i$  különböző  $f$ -edfokú törzsidealokat jelent. Ha a  $p$  törzsfaktorok valamelyikéhez pl.  $\mathfrak{P}$ -hez tartozó felbontási csoport  $\mathfrak{G}$ , akkor a felbontási testben<sup>2</sup>

$$F(x; t_1, \dots, t_n) = \bar{Q}_1(x; t_1, \dots, t_n) \dots \bar{Q}_k(x; t_1, \dots, t_n),$$

hol  $\bar{Q}_i$  egyszerű, a felbontási testben irreducibilis különböző

<sup>1</sup> Über Reduktion von Gleichungen durch Adjunktion. Journal f. r. u. a. Math. 132. k. 1. old.

<sup>2</sup> Idézett helyen (25)-ik egyenlet.

polynomokat jelent, melyeknek együtthatói a nevezett test egész számai. HILBERT szerint

$$p = \bar{\eta}a, \quad \bar{\eta} = \mathfrak{P}^g, \quad (\bar{\eta}, a) = 1,$$

hol  $\bar{\eta}$  a felbontási test elsőfokú törzsideálja. Ha tehát  $\omega$  a nevezett számtest tetszésszerűen egész száma, akkor

$$\omega \equiv R_\omega \pmod{\bar{\eta}^a}, \quad a \text{ tetsz. poz. egész,}$$

e formulában  $R_\omega$  egy  $a$ -tól függő racionális egész szám. Így tehát  $a > 1$ -re

$$F(x; t_1, \dots, t_n) \equiv Q_{1a}(x; t_1, \dots, t_n) \dots Q_{ka}(x; t_1, \dots, t_n) \pmod{p^a},$$

a jobboldalon szereplő polynomok egyszerűek, rac. egész együtthatójúak és  $\pmod{p^a}$  irreducibilisek, mert

$$Q_{ia} \equiv \bar{Q}_i \pmod{\bar{\eta}^a},$$

továbbá, ha a jelölés alkalmasan van választva, LANDSBERG<sup>1</sup> szerint

$$\bar{Q}_i \equiv P_i^{g_i} \pmod{\bar{\eta}}$$

és így<sup>2</sup>

$$Q_{ia} \equiv P_i^{g_i} \pmod{p}. \quad \text{Q. e. d.}$$

7. A (II) és (II\*)-ból következik, hogy  $Q_{ia}$  már a  $p^2$  modulus szerint, sőt a  $g_i = 1$  esetben már  $\pmod{p}$  irreducibilis. Így tehát

$$Q_{i, a+1} \equiv Q_{ia} \pmod{p^a},$$

a minek folytán a

$$F_i = F_i^{g_i} + (Q_{i2} - P_i^{g_i}) + (Q_{i3} - Q_{i2}) + \dots$$

forma együtthatói racionális  $p$ -adikus számok és a  $p$ -adikus számok testében

$$F = F_1 F_2 \dots F_k(p).$$

<sup>1</sup> Idézett helyen (34)-ik egyenlet.

<sup>2</sup> Az eredmény már az (5) alattiakból is következik, ha felhasználjuk azt, hogy  $Q_{ia}$  foka  $f_i g_i$ .



Ámde HENSEL-nek egy tétele szerint<sup>1</sup>  $F$  a nevezett testben pontosan  $k$  számú irreducibilis tényezőre bomlik fel, tehát az  $F_i$ -k épen ezek az irreducibilis tényezők lesznek. Eredményünket a következő módon is mondhatjuk ki. Ha  $F$ -et a  $p$ -adikus számok testében egyszerű és irreducibilis tényezőkre bontjuk és  $e$  tényezők  $\alpha-1$ -dik közelítő értékeit a

$$Q_{1\alpha}, Q_{2\alpha}, \dots, Q_{k\alpha}$$

betűkkel jelöljük, akkor  $\alpha > 1$ -re  $Q_{i\alpha}$  egyszerű és  $(\text{mod } p^\alpha)$  irreducibilis forma és

$$F \equiv Q_{1\alpha} Q_{2\alpha} \dots Q_{k\alpha} \pmod{p^\alpha}$$

az  $F$ -nek egyetlen lehetséges felbontása  $(\text{mod } p^\alpha)$  egyszerű és irreducibilis tényezőkre. Tételünknek eme fogalmazását KÜRSCHÁK úrnak köszönhetem.

8. Legyen  $\omega$  a  $K$  testnek egy egész száma, az  $\omega$  diskriminánsát jelöljük  $D$ -vel, a számtest diskriminánsát  $d$ -vel. Ismeretes, hogy

$$D = dt^2, \quad t \text{ rac. egész.}$$

Ha a  $p$  törzsszám  $t$ -hez relativ prim, akkor a (II)-hez analog tételt, mely az  $f(\omega) = 0$  egyenletre vonatkozik, sokkal egyszerűbb úton lehet belátni.<sup>2</sup>

## 2. §.

1. Jelöljük az  $n$ -edik primitív körosztási egyenlet polinomját  $F_n(x)$ -szel. A körosztási számtestek ismert tulajdonságait az előzőkkel összevetve kapjuk, hogy  $F_n(x) \pmod{p^\alpha}$  egy-

<sup>1</sup> Theorie der algebraischen Zahlen. I. k. 268. old.

<sup>2</sup> Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn XX. k. 39. old. Az idézett cikk «A magasabbfokú kongruenciák elméletéhez» című dolgozatom (Math. és Phys. Lapok XI. k. 28—33. old.) egy részének német fordítása. Megjegyzem, hogy a II. § tételének levezetését később (Math. és Phys. Lapok XII. k. 161. old.) megváltoztattam. Ez teljesen fölösleges, mert az eredeti levezetés helyes; ellenben a III. § tartalmaz egy nem precíz kijelentést.

értelmű módon bomlik fel egyszerű és irreducibilis tényezők szorzatára. Ezt az eredményt most az ideálmélet alkalmazása nélkül akarjuk levezetni.

A következő tények érvényesek:

I. Ha  $(n, p) = 1$ , továbbá a  $p$  törzsszám  $(\text{mod } n)$  az  $f$  kitevőhöz tartozik és  $ef = \varphi(n)$ , hol  $\varphi(n)$  az ismeretes EULER-féle jel, akkor

$$F_n(x) \equiv P_{1a}(x) \dots P_{ea}(x) \pmod{p^a}. \quad (1)$$

Ebben a formulában  $P_{ia}$  különböző  $f$ -ed fokú egyszerű polynomokat jelent, melyek nemcsak  $(\text{mod } p^a)$ , hanem már  $(\text{mod } p)$  is irreducibilisek a

$$P_{ia}(x) \equiv P_{i1}(x) \pmod{p} \quad (1^*)$$

relációk következtében.

II. Ha  $n = p^\beta m$ ,  $(p, m) = 1$ , továbbá a  $p$  törzsszám az  $f$  kitevőhöz tartozik  $(\text{mod } m)$ , akkor

$$F_n(x) \equiv P_1^{p^{(p^\beta)}}(x) \dots P_e^{p^{(p^\beta)}}(x) \pmod{p}, \quad (2)$$

hol  $P_i$  különböző  $f$ -edfokú egyszerű és  $(\text{mod } p)$  irreducibilis polynomokat jelent. Ha  $a > 1$ , akkor

$$F_n(x) \equiv P_{1a}(x) \dots P_{ea}(x) \pmod{p^a}, \quad (3)$$

ebben a formulában  $P_{ia}(x)$  különböző egyszerű és  $(\text{mod } p^a)$  irreducibilis polynomokat jelent, a melyek még a

$$P_{ia}(x) \equiv P_i^{p^{(p^\beta)}}(x) \pmod{p} \quad (3^*)$$

kongruenciákat kielégítik.

2. Az I. állítás bebizonyítására a következő tények elegendők. SCHÖNEMANN szerint egy  $(\text{mod } p^a)$  irreducibilis polynom a  $p$  modulusra vagy irreducibilis polynom hatványa, továbbá érvényes az 1. §. segédtetele, végre (1) helyességéről  $a = 1$  esete a legegyszerűbb eszközökkel meggyőződhetünk.

<sup>1</sup> L. pl. SERRET-WERTHEIM: Handbuch der höheren Algebra. 1879, 2. k. 118. old.



## 3. Körülményesebb a (II) bebizonyítása. Mindenekelőtt

$$F_n(x) \equiv F_m^{(p^\beta)}(x) \pmod{p}, \quad (4)$$

a mi (2)-nek helyességét igazolja. A (4) formula legegyszerűbben kapható, ha az

$$x^{ap} - 1 \equiv (x^a - 1)^p \pmod{p}$$

identitást alkalmazzuk az általánosan ismeretes

$$F_n(x) = \frac{(x^n - 1) \prod_{i=1}^n (x^{q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_n}} - 1) \dots}{\prod_{i=1}^n (x^{q_{i_1}} - 1) \dots}$$

formulára. E formulában

$$n = q_1^{\beta_1} \dots q_r^{\beta_r},$$

hol  $q_i$  különböző törzsszámokat jelent. Minthogy  $(m, p) = 1$ , az előzőkből következik egy

$$F_n(x) \equiv Q_1^{(p^{\beta_1})}(x) \dots Q_r^{(p^{\beta_r})}(x) \pmod{p} \quad (5)$$

alakú felbontás fennállása, melyben  $Q_i$  oly különböző egyszerű és  $(\text{mod } p)$  irreducibilis polynomokat jelent, melyekre

$$F_m(x) \equiv \prod_{i=1}^e Q_i(x). \pmod{p^2} \quad (5^*)$$

Hogy a (II) helyességét bebizonyítsuk, csak a következőt kell kimutatni. Ha az  $R(x)$  egyszerű és  $(\text{mod } p^a)$ ,  $a > 1$  irreducibilis polynom  $F_n(x)$ -et  $(\text{mod } p^a)$  osztja, akkor van oly  $i$  index, melyre

$$R(x) \equiv Q_i^{(p^\beta)}(x). \pmod{p} \quad (6)$$

Ugyanis

$$R(x) \equiv Q_i^\gamma(x) \pmod{p}, \quad \gamma \leq \varphi(p^\beta),$$

ha  $\gamma < \varphi(p^\beta)$ , akkor a következő alakú relációk állának fenn:

$$\begin{aligned} \varphi(p^\beta) &= \gamma_1 + \gamma_2, \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0, \\ F_n(x) &\equiv (Q_i^{\gamma_1}(x) \phi_1(x) + p H_1(x)) (Q_i^{\gamma_2}(x) \phi_2(x) + p H_2(x)) \pmod{p^2} \end{aligned}$$

és így

$$F_n(x) \equiv Q_i(x) K_i(x) \pmod{p^2}. \quad (7)$$

Ámde ez a formula ellenkezik az (5\*) ténnyel, mert az

$$\begin{aligned} \frac{x^{mp^\beta} - 1}{x^{mp^{\beta-1}} - 1} &= x^{mp^{\beta-1}(p-1)} + \dots + 1 = \\ &= (x^{mp^{\beta-1}(p-1)} - 1) + \dots + (x^{mp^{\beta-1}} - 1) + p = \\ &= (x^{mp^{\beta-1}} - 1) f(x) + p \end{aligned}$$

identitás következtében az  $F_n(x)$ ,  $F_m(x) \pmod{p^2}$  nem bírnak közös osztóval, q. e. d.

4. Eredményeink folyománya már most a következő tétel, melyet régebben az ideálelmélet alkalmazásával nyertem. Az irreducibilis  $F_n(x)$  polynom akkor és csak akkor nem reducibilis minden törzsszámhatvány modulusra, ha  $n$  a következő alakban írható:

$$n = p^\beta m, \quad (m, p) = 1, \quad p \text{ törzsszám}$$

és  $p \pmod{m}$  primitiv gyök. (Ha  $m = 1$ , akkor minden szám primitiv gyöknek veendő.)

*Bauer Mihály.*



## A Matematikai és Fizikai Társulat XXIV. rendes közgyűlése.

A Matematikai és Fizikai Társulat XXIV. rendes közgyűlését 1917 május hó 10-én tartotta meg a következő napirenddel:

1. Elnöki megnyitó.
2. Titkári jelentés.
3. Pénztárnok jelentése és költségelőirányzat 1917-re.
4. Pénztárvizsgáló-bizottság jelentése.
5. Titkár és választmányi tagok választása.
6. Indítványok.

Jelen voltak: Anderkó Aurél, Bálint Elemér, Balog Mór, Bauer Mihály, Beckné Klein Magda, Beke Manó, Bláthy Ottó, Bozóky Endre, Brody Imréné, Csengery Piroska, Dávid Lajos, Dienes Pál, Dohányos János, Egerváry Jenő, br. Eötvös Loránd, Farkas Gyula, Fejér Lipót, Fekete Jenő, Fényes Dezső, Fenyvesi Andor, Fraunhofer Lajos, Fröhlich Izidor, Goldziher Károly, Groh Gyula, Gruber Nándor, Haich Sarolta, Hanauer Jenő, br. Harkányi Béla, Hoffmann Ernő, Illosvay Lajos, Jordan Károly, Juvancz Irén, Kémery Margit, Kilezer Gyula, Kondorossy Izabella, König Dénes, Kopp Lajos, Koren Dénes, Koschowitz Gyula, Kovács János, Kövesligethy Radó, Kürschák József, Kűszler Elly, Lukács Ferencz, Lukácsné Téri Tekla, Marczell György, Mattyasovszky Kasszián, Mikola Sándor, Milakovszky László, Nagy Sarolta, Oszlaczky Szilárd, Pfeifer István, Pfeifer Leona, Pogány, Privorszky Alajos, Rados Gusztáv, Rados Ignác, Raffmann Jákó, Rátz László, Réthy Mór, Rohrer László, Róna Zsigmond, Rucsinszky Lajos, Sidon Simon, Somogyi Antal, Sós Ernő, Suták József, Schwarz Emmy, Schweitzer Pál, Szász Ottó, Szilárd Leó, Szily Kálmán, ifj. Szily Kálmán, Szőke Béla, Tasch Antal, Tolnai Jenő, Tötössy Béla, Ujj Gyula, Winter József, Wittmann Ferencz, Woiciehowsky József, Závodszy Margit, Zelenszky Sándor.

### I. Titkári jelentés Fejér Lipóttól.

Tisztelt Közgyűlés!

Van szerencsém a következőkben a «Mathematikai és Fizikai Társulat» 1916. évi életéről jelentést tenni.

A «Mathematikai és Physikai Lapok» huszonötödik évfolyama megjelent 12 ívnyi terjedelemben. E kötet 10 önálló és ismertető czikket, melyek közül 3 matematikai, és 7 physikai tárgyú, továbbá egyéb rovatokat tartalmaz.

Társulatunk az 1916. évben 8 előadó-ülést tartott, melyeken 12 előadást hallottunk. Ezek között 8 matematikai és 4 physikai tárgyú volt.

A XXIII. matematikai tanulóversenyen 27 versenyző vett részt. Az első «br. Eötvös Loránd-díj»-at *Kornfeld Albert*, a másodikat *Hajnal Kálmán* nyerte el.

Hála *Károly Irén* tisztelt alelnökünk nagylelkű alapítványának, Társulatunk az 1916. évben tarthatta I. physikai tanulóversenyét. E versenyen 14 dolgozat érkezett be. Az első «Károly Irén-díj»-at *Jendrassik György*, a másodikat *Szilárd Leó* nyerte el.

A Math. és Phys. Társulatnak 451 tagja van. Ezek közül 213 budapesti, 238 vidéki.

Alapító tagokul ez évben *Mattyasóvszky Kasszián* és *Rátz László* voltak szívesek jelentkezni. Az összes alapító tagok száma így 21-re emelkedett.

A Magyar Tudományos Akadémia, illetőleg annak «Mathematikai és Természettudományi Bizottsága» ezidén is támogatta 2000 koronával Társulatunkat. E hathatós anyagi támogatásért hálás köszönetünket fejezzük ki.

1916-ban ifj. *Andreánszky István* bárót, *Geöcze Zoárdot* és titkárunkat *Zemplén Győzöt* ragadta el tőlünk a háború. *Geöcze* és *Zemplén* elvesztése szinte beláthatatlan és semmivel sem egyensúlyozható kára a magyar matematikának és physikának. Bennünket e csapások igazán mélyen sújtottak; a gyász bélyegét ütötték rá e szomorú társulati évre. Nem az utolsó szavak ezek, melyeket most, midőn a resignatio még olyan távol van szivüntől, e két kiváló emberről hallunk. Tragikus sorsukon és jelentékeny műveiken még a késői magyar nemzedékek is benső részvétellel és őszinte csudálattal fognak elmélkedni.

Szomorúan kell továbbá jelentenem, hogy utolsó közgyűlésünk óta elhunyt alapító tagunk dr. br. *Hornig Károly* és *Barabás Jenő* tagtársunk.

Titkári működésomban a Társulat sok tagja úgy a tudományos, mint az adminisztratív részben nagy segítséget nyújtott. Különösen ki kell emelnem *Mikola Sándor* tagtársunk közreműködését, ki ez évben is szerkesztette folyóiratunk physikai részét és önzetlenül végzett sikeres munkásságával Társulatunkat újból nagy hálára kötelezte.

Lapunk terjedelme, az előadó-ülések száma csökkent; a tisztelt Köz-



gyűlés tudja mely okok folytán. Kérem tehát elnézésüket, és Lapunk munkatársainak szíves türelmét.

Végül kérem a tisztelt Közgyűlést, szíveskedjék jelentéseimet tudomásul venni.

Budapest, 1917 május 10-én.

*Fejér Lipót,*  
a Math. és Phys. Társulat titkára.

## II. Pénztárnok jelentése, költségelőirányzat 1917-re és a pénztárvizsgáló bizottság jelentése.

Pénztárnok előterjeszti a mellékelt számadást és vagyonmérleget 1916-ról; az elnök pedig bemutatja a pénztárvizsgáló bizottság jelentését, mely szerint a pénzkezelés kifogástalan volt.

A közgyűlés ennek alapján a pénztárnoknak a felmentvényt megadja és a pénztárvizsgálóknak fáradozásukért köszönetet mond, felkérvén Balog Mór és Bogyó Samu rendes tagokat, hogy a pénztárvizsgálói tisztséget a következő évre is vállalják el.

Pénztárnok előterjeszti a költségelőirányzatot az 1917. évre, melyet a közgyűlés elfogad.

## III. Titkár és választmányi tagok választása.

A közgyűlés *Mikola Sándort* titkárnak, *Beke Manót*, *Farkas Gyulát*, *Gruber Nándort*, *br. Harkányi Bélát* és *Réthy Mórt* választmányi tagoknak választja meg. Szavazatszedő bizottság: *Fekete Jenő*, *Lukács Ferencz*, *Wodetzky József*.

E szerint:

*Tisztikar:* Elnök: *br. Eötvös Loránd*, alelnökök: *Károly Irén* és *Rados Gusztáv*, titkárok: *Fejér Lipót* és *Mikola Sándor*, jegyzők: *Kopp Lajos* és *Kürschák József*, pénztárnok: *Privorszky Alajos*.

*Választmányi tagok:* *Bartonic Géza*, *Beke Manó*, *Farkas Gyula*, *Fröhlich Izidor*, *Gruber Nándor*, *br. Harkányi Béla*, *Klupathy Jenő*, *Kövesligethy Radó*, *Rácz László*, *Réthy Mór*, *Szily Kálmán*, *Tötössy Béla*.

BEVÉTELEK	Előirányzat		Eredmény	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
1915. évi zárószámadási maradvány .....	1403	33	1403	33
Folyó és köv. évi tagdíjak .....	2000	—	1148	—
Hátralékos tagdíjak .....	1800	—	1158	—
M. Tud. Akadémia segélye .....	2000	—	2000	—
Alapító tagdíjak .....	—	—	1400	—
Károly Irén alapítvány .....	—	—	2500	—
Hirdetési díjak .....	200	—	100	—
Előfizetési díjak .....	1000	—	836	—
Hadikölcsön-kötv. név- és árf.-ért. közötti különbség és $\frac{1}{2}$ % jutalék .....	—	—	205	—
Nyomtatványokból .....	100	—	138	—
Kamatok .....	600	—	906	32
			11794	65

Vagy

VAGYON	1915. év végén		1916. év végén	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Alaptőke :				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján :				
a) Készpénz .....	1940	—	45	—
b) 2600 K névért. főv. kölcsönkötv. ....	2600	—	2600	—
c) 100 « « koronajáradék-kötv. ....	100	—	100	—
d) 3500 « « hadikölcsönkötv. ....	—	—	3500	—
Első hazai takarékpénztári betét .....	108	—	108	—
Majthényi Ottó-féle hagyaték .....	10000	—	10000	—
Károly Irén-alap :				
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján :				
2500 kor. hadikölcsönkötv. ....	—	—	2500	—
Forgó tőke :				
Készpénz .....	474	58	397	14
Leszám. és pénzv. bankban takp. betét ....	48	80	—	—
M. kir. postatakarékpénztárban .....	114	95	126	57
Első hazai takarékpénztári betét .....	200	—	—	—
Leszám. és pénzv. bank letétszámláján .....	565	—	284	—
Tagdíjhátralékok .....	4800	—	5000	—
Föl nem vett hirdetési díjak .....	100	—	50	—
Nyomtatványokban .....	700	—	700	—
	21751	33	25410	71

A számadásokat megvizsgáltuk és rendben találtuk

Balog Mór s. k.      Bogyó Samu s. k.  
a közgyűlés részéről.

1917. évi költse

BEVÉTELEK	1916. évi		1917. évi	
	előirányzat			
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Zárószámadási maradvány.....	1403	33	807	71
Folyó és köv. évi tagdíjak.....	2000	—	1200	—
Hátralékos tagdíjak.....	1800	—	1200	—
M. Tud. Akadémia segélye.....	2000	—	2000	—
Hirdetési díjak.....	200	—	100	—
Előfizetési díjak.....	1000	—	1000	—
Nyomtatványokból.....	100	—	100	—
Kamatok.....	600	—	880	—
Hiány.....	735	39	—	—
	9838	72	7287	71



# Összámadások.

KIADÁSOK	Előirányzat		Eredmény	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai költség .....	6693	97	4400	—
Írói tiszteletdíjak .....	2284	75	1397	50
Expediitő- és irodai költségek .....	700	—	768	44
Középiskolai tanulmányversenyek .....	160	—	316	—
Az alaptörvényhez csatoltatott .....	—	—	1605	—
A Károly Irén-alaphoz csatoltatott .....	—	—	2500	—
Pénztári maradvány a) készpénzben .....	—	—	397	14
b) takarékp. betétben .....	—	—	440	57
			11794	65

érleg.

TEHER	1915. év végén		1916. év végén	
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai tartozások .....	6693	97	5062	74
Írói tiszteletdíjak .....	284	75	362	25
Tiszta vagyon mint egyenleg .....	14772	61	19985	72
	21751	33	25440	71

elt Budapestén, 1917. május 4-én.

jér Lipót s. k.                      Beke Manó s. k.                      Rátz László s. k.  
 titkár.                                      a választmány részéről.

őirányzat.

KIADÁSOK	1916. évi		1917. évi	
	előirányzat			
	Kor.	fill.	Kor.	fill.
Nyomdai költség .....	6693	97	4000	—
Írói tiszteletdíjak .....	2284	75	2000	—
Expediitő- és irodai költségek .....	700	—	800	—
Középisk. tanulmányverseny .....	160	—	316	—
Pénztári maradvány az 1918. évre .....	—	—	171	71
	9838	72	7287	71

# A Matematikai és Physikai Társulat tanulóversenyei.

## I.

### A XXIV. matematikai tanulóverseny.

A folyó évi november hó 24-én tartott XXIV. tanulóversenyre Budapestén 34, Kolozsvárt 6 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen egyidejűleg zárt helyiségben, a társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett, szabályszerűen folyt le. A verseny lefolyásáról mindkét helyen fölvelt jegyzőkönyv szerint a tételek kidolgozására engedett négy órai idő alatt Budapestén 25, Kolozsvárt 3 dolgozat adatott be. A múlt évben volt 27 versenyző és 23 dolgozat; ebben az évben volt 40 versenyző és 28 dolgozat.

A kitűzött tételek a következők voltak:

1. Adva van az

$$\begin{aligned}y - 2x - a &= 0 \\ y^2 - xy + x^2 - b &= 0\end{aligned}$$

egyenletrendszer, a melyben  $x$  és  $y$  az ismeretlenek,  $a$  és  $b$  egész számok. Bebizonyítandó, hogy ha ez az egyenletrendszer racionális számokkal kielégíthető, ezeknek egészeknek kell lenniök.

2. Egy többjegyű  $a$  egész szám négyzetében a tizedes helyén 7 áll. Milyen jegy van az  $a^2$ -ben az egyesek helyén.

3. Adva van a  $K$  kör és belsejében két pont  $A$  és  $B$ . Bebizonyítandó, hogy van (egyébként végtelen sok) olyan kör, mely az  $A$  és  $B$  pontokon halad keresztül és mely egészen a  $K$  kör belsejében fekszik. Megadandó továbbá  $\epsilon$  körök valamelyikének szerkesztése.

A versenydolgozatokat König Dénes volt szíves előzetesen áttekinteni. A teljes bírálóbizottság határozatáról az alábbi jegyzőkönyv számol be.

#### *Jegyzőkönyv*

a XXIV. matematikai tanulóversenyen beadott dolgozatok elbírálása ügyében 1917 december 9-én tartott bizottsági ülésről.

Jelen vannak: Rados Gusztáv elnök, Eber József, Fejér Lipót, Kopp Lajos, Kürschák József, Rátz László és König Dénes előadó.



König Dénes előadó jelentésének meghallgatása és a dolgozatok áttekintése után a bizottság a következő egyhangú határozatot hozta:

A bizottság örömmel állapítja meg, hogy a XXIV. matematikai versenynek, bár a háborús állapot folytán a résztvevők száma csekélyebb volt, az eredménye kielégítő. A beadott dolgozatok közül Pomázi Z. Czelesztiné tűnik ki, a 2. és 3. feladat rövid és helyes megoldásával és szabatos, tömör fogalmazásával. E tekintetben az összes többi dolgozatokat felülmúlja; ezért a bizottság *Pomázi Z. Czelesztinnak*, a cziszterciek-egri főgymnáziumában főtiszt. Neuhold Özséb tanítványának, dolgozatát javasolja az I. br. Eötvös Loránd díjra. Mind a három feladatot megoldotta *Sárosi József*, a ki a bpesti V. ker. áll. főgymnáziumban Csopey László tanítványa volt; de a 2. és 3. tétel kidolgozása nála némileg hézagos, az 1.-é pedig hosszadalmas. Ezért a bizottság dolgozatát csak a II. br. Eötvös Loránd díjra hozhatja javaslatba. Megdicsérésre ajánlja a bizottság *Hirschler Sándor* és *Péchy Judit* dolgozatát az első feladat helyes és rövid megoldásáért.

A folyó évi december hó 20-án tartott választmányi ülés a bizottság e javaslatát határozattá emelte.

## II.

### Az II. physikai tanulmányverseny.

A folyó évi decz. 1-én tartott II. physikai tanulmányversenyre Budapesten 15, Kolozsvárott 1 középiskolai érettségi vizsgálatot tett versenyző jelentkezett. A verseny mindkét helyen zárt helyiségben, a Társulat számos tagjának felügyelete és ellenőrzése mellett szabályszerűen folyt le. Budapesten 13 Kolozsvárott 1 dolgozat adatott be.

A kitűzött tételek a következők voltak:

«1. Hol kell a repülőnek lövedékét leejteni, ha a vele párhuzamosan haladó vonatot eltalálni akarja?

2. Minő adatok alapján dönthetem el, hogy valamely folyóvíz elegendő energiával bír-e egy meglevő elektromos telep energiaszükségletének fedezésére?

Mindkét feladat megoldásánál egy számbeli példa kidolgozása kívánatos.»

A versenydolgozatokat egy bíráló bizottság nézte át; határozatáról az alábbi jegyzőkönyv számol be.

#### *Jegyzőkönyv*

a II. physikai tanulmányversenyen beadott dolgozatok elbírálása ügyében 1917 december 14-én tartott bizottsági ülésről.

Jelen vannak: br. Eötvös Loránd, Bartoniek Géza és Mikola Sándor. A bizottság a dolgozatok átvizsgálása után az első Károly Irén díjra *Sztrókay Pált*, a tanárképző intézet gyakorló főgimnáziumában Sztjártó Miklós tanítványát ajánlja, a ki mindkét feladatot rövid szabatos módon egy óránál rövidebb idő alatt oldotta meg. A második Károly Irén díjra a bizottság *Náray Szabó Istvánt*, a szombathelyi r. k. főgimnáziumban Molnár Szaniszló tanítványát ajánlja, a ki a két feladatot kissé hosszadalmasabban, de szintén teljesen hibátlanul oldotta meg.

Dicséretre ajánlja a bizottság *Theiss Ede* és *Tüdös Béla* dolgozatait, a melyek kisebb fogalmazási hibáktól eltekintve, szintén hibátlanok.

A folyó évi december hó 20-án tartott választmányi ülés a bizottság e javaslatát határozattá emelte.

\*

A választmányi ülést követő előadó-ülésem br. *Eötvös Loránd* elnök mindkét verseny nyerteseinek átadja a jutalmat buzdító szavak kíséretében és kérve őket, hogy adják át volt tanáraiknak a Társulat üdvözlését.

Elnök úr megnyitójában egy a Társulatra nézve fölötté örvendetes eseményről tesz első bejelentést. Dr. *König György* miniszteri s. titkár és dr. *König Dénes* műegyetemi magántanár a Matematikai és Physikai Társulatnál (6%-os hadikölcsön-kötvényekben) 10,000 koronás alapítványt tettek nagyérdemű és felejtethetlen atyjuk *König Gyula* nevére. Az alapítvány kamatai, a nagylelkű alapítók óhaja szerint, röviden kifejezve, a következő két czélt vannak hivatva szolgálni: kiváló, fiatalabb magyar matematikai kutatók működésének időközönkénti jutalmazása és a magyar matematikai irodalomról időszakonként szerkesztendő referatum létesítése. A részletek beható tárgyalásával ez idő szerint a Választmány és annak ez ügyben kiküldött bizottsága foglalkozik.



## Pomázi Z. Czelesztin dolgozata.

(1. br. Eötvös Loránd díjjal jutalmazott dolgozat.)

II. Egy többjegyű  $a$  egész szám négyzetében a tízesek helyén 7 áll. Milyen jegy van a  $a^2$ -ban az egyesek helyén?

*Megoldás.* Ha a négyzetreemelésre gondolunk, tudjuk, hogy a négyzet utolsóelőtti számjegyére befolyással vannak:

1. az előző jegyekből alkotott szám kétszeresének és az utolsó számjegynek szorzata (e szorzatnak is csak utolsó számjegye); ez mindig páros.

2. az utolsó tag négyzetének első jegye, ha kétjegyű.

Mivel a mi  $a^2$  számunk utolsóelőtti jegye páratlan, következik, hogy az  $a$  utolsó jegyének négyzete kétjegyű és benne a tízesjegy páratlan. Ilyen számjegy csak kettő van, a 4 és a 6. De mindkettőjük négyzete egyformán 6-ra végződik. Így  $a^2$ -ban is 6 áll az egyesek helyén.

III. Adva van  $K$  kör és belsejében két pont,  $A$  és  $B$ . Behizonyítandó, hogy van (egyébként végtelen sok) olyan kör, mely az  $A$  és  $B$  pontokon halad keresztül és mely egészen a  $K$  kör belsejében fekszik. Megadandó továbbá e körök valamelyikének szerkesztése.

*Megoldás.* Ha  $A$ -t összekötjük  $O$  középponttal, az  $\overline{AO}$  egyenes bármely  $C$  pontja középpontja lehet egy  $\overline{AC}$  sugarú körnek, mely egészen a  $K$  körben van. A  $\overline{BO}$  szegmentum bármely pontja szintén.

Ha most az  $\overline{AB}$ -t merőlegesen megfelezzük, ez a felező egyenes vagy az  $\overline{AO}$ -t, vagy a  $\overline{BO}$ -t metszeni fogja. A metszésnél keletkezett  $C$  pont tehát középpontja egy  $\overline{AC} = \overline{BC}$  sugarú körnek, mely az előbbieket érint egészen benne van a  $K$  körben.

## Sztróka Pál dolgozata.

(1. Károly Irén díjjal jutalmazott dolgozat.)

1. Hol kell a repülőnek lövedékét leejtenie, ha a vele párhuzamosan haladó vonatot eltalálni akarja?

A  $c_1$  sebességgel haladó repülőgépről leejtett lövedék mozgása két komponensből tevődik össze: 1. a szabadonesésből, 2. tehetetlensége folytán a repülőgép mozgásirányával megegyező  $c_1$  sebességű mozgásból; azaz a lövedék mindig a repülőgépről bocsátott függőlegesben lesz. Ebből

következik, hogy mikor a lövedék a földre ér, a gépnek épp a vonat fölött kell lenni. Tehát

$$t = \sqrt{\frac{2m}{g}}$$

másodperczel előbb kell bombáját a találkozás előtt leejtenie, vagy a mi ugyanazt jelenti, a repülőgép földre való vetületének

$$l = t(c_1 - c_2)$$

távolságra kell lennie a vonattól.

Pl.

$$c_1 = 144 \frac{\text{Km}}{\text{o}} = 40 \text{ m sec}^{-1}$$

$$c_2 = 64 \cdot 8 \frac{\text{Km}}{\text{o}} = 18 \text{ m sec}^{-1}$$

$$m = 1600 \text{ m}$$

$$t = \sqrt{\frac{3200}{9 \cdot 81}} = 18 \cdot 1 \text{ sec}$$

$$l = 18 \cdot 1 \cdot 22 = 398 \text{ m.}$$

2. Minő adatok alapján dönthetem el, hogy valamely folyóvíz elegendő energiával bír-e egy meglevő elektromos telep energiaszükségletének fedezésére?

Függ attól, hogy milyen szintkülönbséget tudok létrehozni és hogy milyen a folyóvíz bősége.

Ha a szintkülönbség  $m$ , a vízbőség  $a \frac{\text{lit}}{\text{sec}}$ , akkor a másodperczenként nyerhető energia (effektus) elméletileg:

$$W = ma \frac{\text{m Kg}}{\text{sec}}.$$

Pl. Az elektromos telep 1000 Kw-os, azaz 1361 lóerős

$$\text{a folyó vízbősége} \dots \dots \dots a = 30000 \frac{\text{lit}}{\text{sec}}$$

$$\text{nyerhető szintkülönbség} \dots \dots \dots m = 5 \text{ m.}$$

$$\text{elméleti effektus} \dots \dots \dots W = 150000 \frac{\text{mKg}}{\text{sec}} = 2000 \text{ lóerő}$$

tehát az energiaszükséglet elegendő.

Megjegyzendő, hogy az első feladatnál a közegellentállás, a második feladatban pedig a súrlódás és a gép hatásfoka figyelembe nem vétett.